A

Topologien auf der Klasse aller Banachräume

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der

Fakultät für Mathematik und Informatik

der Friedrich–Schiller–Universität Jena

von Dipl.–Math. Thomas Kaufhold

geboren am 14. Dezember 1969 in Leinefelde

Gutachter:

1. Prof. Dr. Albrecht Pietsch (Jena)
2. Prof. Dr. Hermann König (Kiel)
3. Dr. habil. Stefan Geiß (Paris)

Tag des Rigorosums: 9. Dezember 1997

Tag der öffentlichen Verteidigung: 16. Dezember 1997

Dank

Für die Anregung zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. A. Pietsch ganz herzlich danken. Sie wäre ohne seine geduldige Betreuung und zahlreichen Ratschläge nicht zustande gekommen.

Weiterhin danke ich Herrn Dr. A. Hinrichs für seine hilfreiche Begleitung in allen Phasen der Arbeit und die häufigen Diskussionen, für die er immer Zeit fand.

Schließlich bedanke ich mich bei der Studienstiftung des deutschen Volkes, die mir durch ein dreijähriges Stipendium die Beschäftigung mit diesem Thema ermöglichte.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mathematische Untersuchungen entwickeln sich oft so: Man findet gewisse Eigenschaften von „wohlbekannten“ Objekten heraus. Dann versucht man, ein Axiomensystem zu schaffen, das die bisher untersuchten Objekte erfüllen; darüber hinaus sollte sich eine reichhaltige und interessante Theorie ableiten lassen, die dann für alle Objekte, die das Axiomensystem erfüllen, gilt.

Damit stellt sich auch die Frage nach einer Klassifikation dieser Objekte. Manchmal ist diese Frage einfach zu beantworten: $I\!R$ ist einziges Modell eines vollständigen, geordneten Körpers. Hilberträume sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch die Kardinalzahl jede ihrer Orthonormalbasen. Die einfachen endlichen Gruppen kann man seit 1981 klassifizieren.

Es stellt sich heraus, daß für Banachräume eine befriedigende Klassifikation bisher nicht existiert. Auch die folgende Untersuchung wird keine endgültige Ordnung in die Welt der Banachräume bringen, sondern vielmehr zeigen, wie reichhaltig diese Klasse mathematischer Objekte ist. Unser Versuch einer Klassifikation hat außerdem die nützliche Eigenschaft, zwei Banachräumen ein „Maß für ihre Unterschiedlichkeit“ (allerdings keine Halbmetrik) zuzuordnen.

Der Banach–Mazur–Abstand ist nur für isomorphe Banachräume erklärt. Er ist deshalb kaum geeignet, zu einer Übersicht in der Klasse aller Banachräume beizutragen. Allerdings ist er für zwei Banachräume gleicher endlicher Dimension immer definiert und es gilt für $n-$dimensionale Banachräume X und Y

$$1 \leq d(X,Y) \leq n.$$

Dabei ist $d(X,Y) = 1$ genau für die isometrisch isomorphen Banachräume. Wenn man die isometrisch isomorphen $n-$dimensionalen Banachräume identifiziert, so ist $\log d(X,Y)$ eine Metrik auf der Menge der Äquivalenzklassen M_n. Dieser metrische Raum ist bekannt als Minkowski–Kompaktum.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{DIM}_n(X)$ und $\mathrm{DIM}_n(Y)$ die Mengen der $n-$dimensionalen Teilräume zweier unendlichdimensionaler Banachräume X und Y. Nun betrachten wir $\mathrm{DIM}_n(X)$ und $\mathrm{DIM}_n(Y)$ als Teilmengen des metrischen Raumes M_n. Ihren Unterschied mißt der Hausdorff–Abstand, der eine Metrik auf den (nichtleeren) abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raumes ist.

Wir werden den asymmetrischen Hausdorff–Abstand in M_n mit

$$\mathbf{a}_n(X,Y) := \sup_{E_n \in DIM_n(X)} \inf_{F_n \in DIM_n(Y)} d(E_n, F_n)\,.$$

bezeichnen. Diese Größe wird nur durch $\mathrm{DIM}_n(X)$ und $\mathrm{DIM}_n(Y)$ bestimmt. Weiter ist

$$\mathbf{s}_n(X,Y) := \max\left\{\mathbf{a}_n(X,Y), \mathbf{a}_n(Y,X)\right\}.$$

X und Y gehören einer Äquivalenzklasse an ($X \sim Y$), wenn die Folge $\mathbf{s}_n(X,Y)$ beschränkt ist. Mit $[X]$ bezeichnen wir die Klasse, zu der X gehört. Wir werden sehen, daß dann

$[X]$ bestimmt ist durch die Folge der Abschlüsse der Mengen $\mathrm{DIM}_n(X)$. Die Gesamtheit der Äquivalenzklassen bildet damit eine Menge, die wir mit $[\mathsf{L}]$ bezeichnen. Wenn wir von *Topologien auf der Klasse aller Banachräume* sprechen, so meinen wir im folgenden Topologien auf der Menge $[\mathsf{L}]$.

Die Äquivalenzklassen sind ziemlich groß. Enthält $[l_2]$ lediglich alle zum Hilbertraum isomorphen Banachräume, so gehören zu $[l_\infty]$ neben den Funktionenräumen $C(K)$ auch c_0, die Diskalgebra $A(I\!\!D)$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}(l_2)$ und alle Banachräume der Form $X \oplus l_\infty$.

Das vorgestellte Konzept wird in [Pie] erstmals eingeführt und untersucht. Inhalt der vorliegenden Arbeit sind eine Reihe ergänzender Resultate. Es folgt eine Zusammenfassung des Inhaltes mit den wichtigsten Ergebnissen.

Im ersten Kapitel werden wir benötigte Bezeichnungen der allgemeinen Banachraumtheorie und den Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand $\mathbf{a}_n(X,Y)$ einführen. Zwei elementare Aussagen über die Folgen $\mathbf{a}_n(X,Y)$ schließen sich an. Eine erste Untersuchung der Äquivalenzklassen fragt weiterhin, ob man eine gegebene Eigenschaft von Banachräumen in jeder Äquivalenzklasse bei mindestens einem Repräsentanten wiederfindet. So enthält jede Klasse einen separablen Banachraum. Man kann zeigen, daß für $X \sim l_2(X)$ ein reflexiver Raum in $[X]$ liegt. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, daß $[l_1]$ keine reflexiven Räume enthält, also insbesondere $l_1 \not\sim l_2(l_1^m)$ gilt. Eine untere Abschätzung für das Wachstum von $\mathbf{s}_n(l_p, l_2(l_p^m))$ für $1 \leq p < 2$ wird angegeben. Eine andere Untersuchung im vierten Kapitel zeigt, daß in jeder Umgebung von $[l_2]$ ein Banachraum X mit der Eigenschaft $X \not\sim l_2(X)$ liegt (Theorem 4.17).

Die am besten untersuchten Banachräume sind die L_p–Räume. Deshalb werden wir im zweiten Kapitel die Elemente von $[l_p]$ für $1 \leq p < \infty$ bis auf Isomorphie beschreiben und feststellen, daß sie für $p \neq 2$ mehr als nur die $\mathcal{L}_p$–Räume enthalten. Darüber hinaus werden die Banachräume charakterisiert, für die die schwächere Eigenschaft $X \sim X \oplus l_p$ gilt. Entscheidend für diese Untersuchung ist ein Resultat von T. Figiel, zu dem ein elementarer Beweis gefunden werden konnte (Lemma 2.9).

Im dritten Kapitel werden wir uns mit geeigneten Topologien auf $[\mathsf{L}]$ und einigen ihrer Eigenschaften beschäftigen. Es sei $a = (\alpha_n)$ eine positive, monoton wachsende und divergierende Folge. Dann definieren wir eine Umgebung von X wie folgt

$$U_a(X) := \{Y \in \mathsf{L} : \ \mathbf{s}_n(X,Y) \leq c\alpha_n \ \text{ für ein } c > 0 \text{ und } n \in I\!\!N\}.$$

Dabei bezeichnet L die Klasse aller unendlichdimensionalen Banachräume. Betrachtet man alle diese Umgebungen, so beschreiben sie eine Topologie auf $[\mathsf{L}]$, die wir Ultra–Topologie nennen. Andere Topologien erhält man durch Einschränkung des Umgebungsbegriffs. Die polynomiale bzw. logarithmische Topologie basiert auf Umgebungen U_a mit Folgen der Form $a = (n^\alpha)$ bzw. $a = ((1 + \log n)^\alpha)$ mit $\alpha > 0$.

Die Ultra–Topologie ist nahezu diskret. Zum Beispiel konnte gezeigt werden, daß der abzählbare Durchschnitt offener Mengen offen ist und alle präkompakten Teilmengen endlich sind (Satz 3.5).

Einziger bekannter isolierter Punkt in der logarithmischen Topologie ist $[l_\infty]$. M. I. Ostrovskii hat gezeigt, daß $[l_\infty]$ in der polynomialen Topologie nicht isoliert ist. Wir werden beweisen, daß die polynomiale Topologie keinen isolierten Punkt enthält (Theorem 4.2). Weiterhin stellt sich heraus, daß eine Reihe bekannter Klassen von Banachräumen keine isolierten Punkte in der Ultra–Topologie enthalten kann (z. B. UMD–Räume). Außerdem enthalten diese Klassen keine inneren Punkte in der Ultra–Topologie (Theorem 4.10). Eine analoge Aussage gilt für die polynomiale Topologie (Theorem 4.12).

Einige Berechnungen von $\mathbf{a}_n(X, Y)$ für konkrete Banachräume X und Y werden im fünften Kapitel durchgeführt. Weiß man über $\mathbf{a}_n(l_r, l_s)$ recht gut Bescheid (Bild 2.16 und Satz 2.17), so reichen die bisherigen Kenntnisse bei anderen Banachräumen meist nur für obere oder untere Abschätzungen für das Wachstum von $\mathbf{a}_n(X, Y)$. In diesem Zusammenhang konnte ein Satz von G. Pisier durch Einschränkung auf die Klasse der Banachverbände wesentlich einfacher bewiesen werden (Satz 5.4). Schließlich konnte ein erstes Resultat für Lorentz–Räume (Theorem 5.13) und Räume $2-$summierender Operatoren (Theorem 5.14) gefunden werden.

Basierend auf dem Begriff der Öffnung zwischen zwei Banachräumen wurden von M. I. Ostrovskii weitere Strukturen auf L betrachtet. M. I. Kadets verwendete die Öffnungen zur Definition einer Halbmetrik d_Λ auf L. Wir werden im sechsten Kapitel sehen, daß aus $d_\Lambda(X, Y) = 0$ die Äquivalenz von X und Y folgt, die Umkehrung jedoch nicht gilt (Theorem 6.1). Weiterhin zeigen wir, daß sich die Öffnungstopologie auf der Menge der separablen Banachräume völlig von den von uns definierten Topologien unterscheidet (Theorem 6.4).

1 Grundlagen

Banachräume

$E_n, F_n, G_n, \ldots$ bezeichnen im folgenden $n-$dimensionale Banachräume, große Buchstaben $X, Y, Z, \ldots$ ohne Index werden wir in der Regel den unendlichdimensionalen Banachräumen vorbehalten. Beim Auftreten verschiedener Normen auf einem Vektorraum werden wir präzisierend für die Norm eines Elementes x des Banachraumes X statt der gewohnten Bezeichnung $\|x\|$ auch $\|x|X\|$ schreiben. Es bezeichnen $B(X) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel von X und $S(X) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre von X.

Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnen wir mit $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ oder $L_p(\mu)$ kurz den klassischen Funktionenraum über einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Mit l_p bezeichnen wir die entsprechenden Folgenräume. Schließlich ist l_p^n der $n-$dimensionale Raum mit der l_p-Norm.

$\boldsymbol{\mathcal{L}}(X, Y)$ bezeichnet die Menge der linearen und stetigen Abbildungen von X nach Y. Wie üblich ist $\boldsymbol{\mathcal{L}}(X) := \boldsymbol{\mathcal{L}}(X, X)$. Die identische Abbildung in X wird mit I_X bezeichnet. Mit $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ bezeichnen wir den *Nullraum von T* und mit $T(X) := \{y \in Y : (\exists x \in X)\ Tx = y\}$ das *Bild von T*. Ein Teilraum Y eines Banachraumes X heißt *komplementiert*, falls es eine Projektion $P \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$ gibt mit $P(X) = Y$.

X und Y heißen *isomorph ($X \cong Y$)*, wenn eine Bijektion $T \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(X, Y)$ existiert. Falls $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ gilt, so heißen X und Y *isometrisch isomorph*. Isometrisch isomorphe Banachräume werden wir in Zukunft stets als identisch betrachten.

Den Dualraum von X bezeichnen wir mit X', sein Bidual ist dann X''. Der Wert eines Funktionals $x' \in X'$ an der Stelle $x \in X$ wird mit $\langle x, x' \rangle$ bezeichnet. Die Abbildung i

$$(i(x))\,(x') := \langle x, x' \rangle$$

ist für jedes $x \in X$ ein lineares und stetiges Funktional auf X'. Dann heißt $i : X \to X''$ die *kanonische Abbildung von X in seinen Bidual X''*. Falls diese isometrische Abbildung surjektiv ist, so nennt man X *reflexiv*.

Der Banachraum $X \oplus_p Y$ ist die direkte Summe von X und Y ausgestattet mit der Norm $(\|x|X\|^p + \|y|Y\|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$. Wenn nicht anders vereinbart, so bezeichnet $X \oplus Y$ den entsprechenden Raum mit der Norm $(\|x|X\|^2 + \|y|Y\|^2)^{1/2}$.

Die l_2-Summe $[l_2, X_i]$ besteht aus den Folgen (x_i) mit $x_i \in X_i$, so daß gilt

$$\|(x_i)|l_2\| := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i|X_i\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Falls i eine allgemeine Indexmenge I durchläuft, so schreiben wir $[l_2(I), X_i]$.

Zwei Banachräume X_0 und X_1 seien stetig in einen dritten Banachraum X eingebettet. Dann heißt (X_0, X_1) Interpolationspaar. Für $0 < \theta < 1$ bezeichnet $[X_0, X_1]_\theta$ den Banachraum, der durch das komplexe Interpolationsverfahren definiert ist. Entsprechend bezeichnet $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ den durch reelle Interpolation definierten Banachraum für $0 < \theta < 1$ und $1 \leq q \leq \infty$. (zur Definition siehe [BL76]).

Banach–Mazur–Abstand und Minkowski–Kompaktum

Der *Banach–Mazur–Abstand* $d(E_n, F_n)$ ist definiert als

$$d(E_n, F_n) := \inf \|T\| \|T^{-1}\| \,,$$

wobei das Infimum über alle stetigen linearen Bijektionen T von E_n nach F_n gebildet wird.

Offenbar ist

$$d(E_n, G_n) \leq d(E_n, F_n) d(F_n, G_n).$$

Es gilt das bekannte Theorem von F. John:

Satz 1.1 [Joh48]
Für $n-$dimensionale Banachräume E_n ist $d(E_n, l_2^n) \leq n^{1/2}$.

Einen Beweis findet man auch in [Bol90].

Wenn wir Banachräume E_n und F_n mit $d(E_n, F_n) = 1$ identifizieren und die Menge der Äquivalenzklassen mit M_n bezeichnen, so ist $\log d(E_n, F_n)$ eine Metrik auf M_n. Dieser metrische Raum ist kompakt, einen Beweis findet man etwa in [TJ89, S. 278]. M_n wird *$n-$tes Minkowski–Kompaktum* genannt.

Lokale Banachraumtheorie

In der lokalen Banachraumtheorie werden Eigenschaften von Banachräumen untersucht, die mit Hilfe der endlichdimensionalen Teilräume definiert sind. $\mathrm{DIM}_n(X)$ bezeichnet die Menge der $n-$dimensionalen Teilräume von X. Die Gesamtheit aller endlichdimensionalen Teilräume von X bezeichnen wir mit $\mathrm{DIM}(X)$. Da jeder endlichdimensionale Banachraum isometrisch in l_∞ eingebettet werden kann, ist $\mathsf{M}_n = \mathrm{DIM}_n(l_\infty)$.

Es sei $C \geq 1$. Man nennt einen Banachraum X *$C-$endlich repräsentiert in Y*, falls zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ ein $F_n \in \mathrm{DIM}_n(Y)$ existiert, so daß $d(E_n, F_n) \leq C$ gilt. Falls X $C-$endlich repräsentiert in Y für jedes $C > 1$ ist, so nennt man X *endlich repräsentiert in Y*.

In diesem Zusammenhang findet man in der Literatur verschiedene Begriffe für Spezialfälle. Eine Folge von Banachräumen (E_n) mit $\dim E_n = n$ ist *$C-$gleichmäßig in Y enthalten*, wenn Banachräume $F_n \in \mathrm{DIM}_n(Y)$ existieren, so daß $d(E_n, F_n) \le C$ gilt. Wenn die E_n $C-$gleichmäßig in Y enthalten sind für jedes $C > 1$, so spricht man auch von den *gleichmäßig in Y enthaltenen E_n*.

Das bekannte Dvoretzky–Theorem besagt, daß jeder unendlichdimensionale Banachraum die l_2^n gleichmäßig enthält [Dvo61].

Ein tiefliegendes Resultat ist das Krivine–Theorem [Kri76]:

Satz 1.2 $1 \le p \le \infty$. *Wenn ein Banachraum X die l_p^n $C-$gleichmäßig für ein $C > 1$ enthält, so enthält er die l_p^n gleichmäßig.*

Es sei $1 \le p < \infty$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Der Operator T heißt *$p-$summierend*, falls eine Konstante C existiert, so daß für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p \right)^{1/p} \le C \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x' \rangle|^p \right)^{1/p} : x' \in B(X') \right\}.$$

Die kleinste derartige Konstante bezeichnen wir mit $\pi_p(T)$, die Menge aller $p-$summierenden Operatoren mit $\Pi_p(X, Y)$.

Der Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt *nuklear*, falls es eine Darstellung

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' \otimes y_n \tag{1.1}$$

mit $(x_n') \in X'$ und $(y_n) \in Y$ gibt, so daß gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| \|y_n\| < \infty$. (1.1) heißt eine *nukleare Darstellung von T*.

Die *nukleare Norm von T* ist definiert als

$$\nu(T) := \inf \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| \|y_n\| \right),$$

dabei wird das Infimum über alle nuklearen Darstellungen von T gebildet.

Ein in der Arbeit häufig benutztes Hilfsmittel sind Typ und Cotyp von Banachräumen. Der hier angegebene allgemeinere Zugang ist aus [PW]. Es seien $1 \le u, v < \infty$ und $\mathcal{A} = (a_1, a_2 \ldots)$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots)$ zwei Orthonormalsysteme in $L_2(\Omega_1, \mu_1) \cap L_v(\Omega_1, \mu_1)$ und $L_2(\Omega_2, \mu_2) \cap L_u(\Omega_2, \mu_2)$. Die kleinste Konstante C, so daß für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$ gilt

$$\left(\int_{\Omega_1} \| \sum_{k=1}^{n} a_k(s) x_k \|^v d\mu_1(s) \right)^{1/v} \le C \left(\int_{\Omega_2} \| \sum_{k=1}^{n} b_k(t) x_k \|^u d\mu_2(t) \right)^{1/u},$$

bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\varrho}_u^{(v)}(X | \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$. Für den häufig verwendeten Fall $u = v = 2$ schreiben wir stattdessen kurz $\boldsymbol{\varrho}(X | \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$.

Man verifiziert leicht [PW, 3.3.2]

$$\boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n) \leq n^{1/2}. \tag{1.2}$$

Beispiele für Orthonormalsysteme sind die Standard–Orthonormalbasis der Einheitsvektoren von l_2, hier mit $\mathcal{I}$ bezeichnet, und das System der Rademacher–Funktionen $\mathcal{R} = (r_1, r_2, \ldots)$ mit

$$r_k(t) := \operatorname{sign}\Big(\sin(2^k \pi t)\Big) \qquad t \in [0,1],\ k = 1, 2, \ldots.$$

Weitere Orthonormalsysteme sind

$$\mathcal{S} := \Big\{(\sqrt{2}\sin kt),\ k = 1, 2, \ldots\Big\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} := \Big\{(\sqrt{2}\cos kt),\ k = 1, 2, \ldots\Big\}$$

in $L_2[0, \pi]$ und das System der Haarfunktionen $\mathcal{H} := \{h_1, h_2, \ldots\}$ in $L_2[0, 1]$.

Für Familien von Banachräumen $(X_i)_{i \in I}$ gilt [PW, 3.3.4]:

$$\boldsymbol{\varrho}([l_2(I), X_i]|\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n) = \sup_{i \in I} \boldsymbol{\varrho}(X_i|\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n).$$

Diese Eigenschaft bezeichnen wir als l_2*–Stabilität* von $\boldsymbol{\varrho}$.

Ein Banachraum X hat *(Rademacher–)Typ* p bzw. *(Rademacher–)Cotyp* q, falls es eine Konstante C gibt, so daß für alle $n \in I\!N$ gilt

$$\boldsymbol{\varrho}_p^{(2)}(X|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) \leq C \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{\varrho}_2^{(q)}(X|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \leq C\,.$$

Man sieht leicht die folgende Relation

$$\boldsymbol{\varrho}_2^{(q)}(X|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \leq \boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \leq n^{1/2-1/q} \boldsymbol{\varrho}_2^{(q)}(X|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n)\,. \tag{1.3}$$

Bemerkung: Falls $1 < p < p_0 < 2 < q_0 < q < \infty$ ist und für ein $C > 0$

$$\boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) \leq C n^{1/p_0 - 1/2} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \leq C n^{1/2-1/q_0}$$

gilt, so hat X Typ p bzw. Cotyp q [PW, 4.3.10, 4.5.10].

Beispiele:

$\boldsymbol{\varrho}(L_2|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) = \boldsymbol{\varrho}(L_2|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) = 1.$

$\boldsymbol{\varrho}(L_p|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) = n^{1/p-1/2}, \quad \boldsymbol{\varrho}(L_p|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \leq C_p \qquad (1 \leq p \leq 2),$

L_p hat Typ p und Cotyp 2,

$\boldsymbol{\varrho}(L_q|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) \leq C_q, \quad \boldsymbol{\varrho}(L_q|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) = n^{1/2-1/q} \qquad (2 \leq q < \infty),$

L_q hat Typ 2 und Cotyp q.

$\boldsymbol{\varrho}(L_\infty|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) = \boldsymbol{\varrho}(L_\infty|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) = n^{1/2}.$

Die Klasse der Banachräume mit Typ 2 bzw. Cotyp 2 werden wir mit RT_2 bzw. RC_2 bezeichnen.

Die Typ–Norm $\boldsymbol{\varrho}(\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n)$ besitzt die folgende wichtige Eigenschaft bezüglich der komplexen Interpolation [PW, 3.4.9 und 3.7.3]

$$\boldsymbol{\varrho}([X_0, X_1]_\theta | \mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) \leq \boldsymbol{\varrho}(X_0 | \mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n)^{1-\theta} \boldsymbol{\varrho}(X_1 | \mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n)^\theta. \tag{1.4}$$

Wir definieren

$$p(X) := \inf\{p \geq 1 : \text{ die } l_p^n \text{ sind gleichmäßig in } X \text{ enthalten}\}$$

$$q(X) := \sup\{q \leq \infty : \text{ die } l_q^n \text{ sind gleichmäßig in } X \text{ enthalten}\}.$$

Wegen des Dvoretzky–Theorems ist $1 \leq p(X) \leq 2 \leq q(X) \leq \infty$ für alle (unendlichdimensionalen) Banachräume X.

Ein ebenso bekanntes wie tiefliegendes Resultat ist das Maurey–Pisier–Theorem.

Satz 1.3 [MP76]
Für unendlichdimensionale Banachräume X sind $l_{p(X)}^n$ und $l_{q(X)}^n$ gleichmäßig in X enthalten. Außerdem ist

$$p(X) = \sup\{p \geq 1 : \ X \textit{ hat Typ } p\}$$

und

$$q(X) = \inf\{q \leq \infty : \ X \textit{ hat Cotyp } q\}.$$

In der Arbeit werden wir auch die Klasse der schwachen Hilberträume betrachten, wir geben nun die Definition an (siehe [Pie] und [Pis89]).

Es sei E_n ein $n-$dimensionaler reeller Banachraum. Mit $vol(\cdot)$ bezeichnen wir das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$. Dann existieren zwei eindeutig bestimmte Ellipsoide $D_{E_n}^{max}$ und $D_{E_n}^{min}$ mit $D_{E_n}^{max} \subseteq B(E_n) \subseteq D_{E_n}^{min}$ und maximalem bzw. minimalem Volumen. Man definiert

$$\mathbf{vr}^{max}(E_n) := \left[\frac{vol(B(E_n))}{vol(D_{E_n}^{max})}\right]^{1/n} \quad \text{und} \quad \mathbf{vr}^{min}(E_n) := \left[\frac{vol(D_{E_n}^{min})}{vol(B(E_n))}\right]^{1/n}.$$

Es gilt

$$\mathbf{vr}^{max}(E_n) \leq d(E_n, F_n)\mathbf{vr}^{max}(F_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{vr}^{min}(E_n) \leq d(E_n, F_n)\mathbf{vr}^{min}(F_n).$$

Es bezeichnen

$$\mathbf{v}_n^{max}(X) := \sup_{E_n \in DIM_n(X)} \mathbf{vr}^{max}(E_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_n^{min}(X) := \sup_{E_n \in DIM_n(X)} \mathbf{vr}^{min}(E_n).$$

Ein Banachraum X heißt *schwacher Hilbertraum*, falls die Folgen $(\mathbf{v}_n^{max}(X))$ und $(\mathbf{v}_n^{min}(X))$ beschränkt sind.

Wir beenden diesen Abschnitt mit der bekannten Khintchine–Ungleichung (siehe z. B. [DJT95, 1.10]).

Satz 1.4 *Für $0 < p < \infty$ existieren positive Konstanten A_p und B_p, so daß für alle $n \in I\!N$ und alle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gilt*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} .$$

Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand

Die folgenden Bezeichnungen wurden zum großen Teil aus [Pie] übernommen.

Wir bezeichnen mit L die Klasse aller unendlichdimensionalen Banachräume.

Definition 1.5 *Für Banachräume X und Y aus L und $n \in I\!N$ heißt*

$$\mathbf{a}_n(X,Y) := \sup_{E_n \in DIM_n(X)} \inf_{F_n \in DIM_n(Y)} d(E_n, F_n)$$

$n-$ter asymmetrischer Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand. *Wir nennen*

$$\mathbf{s}_n(X,Y) := \max \{\mathbf{a}_n(X,Y),\ \mathbf{a}_n(Y,X)\}$$

den $n-$ten symmetrischen Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand.

Mit anderen Worten, $\mathbf{a}_n(X,Y)$ ist das Infimum aller Zahlen $C \geq 1$, so daß gilt: Zu jedem $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ existiert ein $F_n \in \mathrm{DIM}_n(Y)$ mit $d(E_n, F_n) \leq C$.

$\log \mathbf{a}_n(X,Y)$ ist der asymmetrische Hausdorff–Abstand der Mengen $\mathrm{DIM}_n(X)$ und $\mathrm{DIM}_n(Y)$ im metrischen Raum M_n. Auf den abgeschlossenen Teilmengen von M_n ist $\log \mathbf{s}_n(X,Y)$ eine Metrik, also auch auf der Klasse aller Banachräume, wenn man Banachräume mit $\overline{\mathrm{DIM}_n(X)} = \overline{\mathrm{DIM}_n(Y)}$ identifiziert.

Wir beginnen mit einigen einfachen Eigenschaften des Hausdorff–Banach–Mazur–Abstandes.

Es gilt eine multiplikative Dreiecksungleichung

$$\mathbf{a}_n(X,Z) \leq \mathbf{a}_n(X,Y)\mathbf{a}_n(Y,Z) :$$

Zu $\varepsilon > 0$ und $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ gibt es ein $F_n \in \mathrm{DIM}_n(Y)$ mit $d(E_n, F_n) < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_n(X,Y)$. Zu diesem F_n existiert nun ein $G_n \in \mathrm{DIM}_n(Z)$ mit $d(F_n, G_n) < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_n(Y,Z)$. Da also gilt

$$d(E_n, G_n) < (1+\varepsilon)^2 \mathbf{a}_n(X,Y)\mathbf{a}_n(Y,Z),$$

für beliebiges $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ und ein $G_n \in \mathrm{DIM}_n(Z)$, folgt für $\varepsilon \to 0$ die Behauptung.

Wegen des Dvoretzky–Theorems gilt für alle $X \in \mathsf{L}$

$$\mathbf{a}_n(l_2, X) = 1,$$

und wegen Satz 1.1 ist $\mathbf{a}_n(X, l_2) \leq n^{1/2}$. Also gilt für alle $X, Y \in \mathsf{L}$

$$\mathbf{a}_n(X, Y) \leq n^{1/2}.$$

Zur Berechnung des Hausdorff–Banach–Mazur–Abstandes zum Hilbertraum kann man die Kwapien–Idealnorm $\boldsymbol{\kappa}_n(X)$ benutzen.

Definition 1.6 [Pie90]
Es sei $n \in I\!N$ und $X \in \mathsf{L}$. Dann ist

$$\boldsymbol{\kappa}_n(X) := \inf C,$$

dabei wird das Infimum über alle Zahlen $C \geq 0$ gebildet, so daß gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$$

für alle $x_1, \dots x_n \in X$ und alle unitären $(n,n)-$Matrizen (σ_{ij}).

Satz 1.7 [Pie90]

$$\boldsymbol{\kappa}_n(X) \leq \mathbf{a}_n(X, l_2) \leq 2\boldsymbol{\kappa}_n(X).$$

Da uns nur das Wachstum der Folge $\mathbf{a}_n(X, l_2)$ interessiert, werden wir in dieser Arbeit die beiden Größen nicht unterscheiden.

Die Kwapien–Idealnorm ist symmetrisch, d. h. es gilt $\boldsymbol{\kappa}_n(X) = \boldsymbol{\kappa}_n(X')$ [Pie90].

Es folgen zwei einfache Sätze.

Satz 1.8 *Die Folge $\mathbf{a}_n(X, Y)$ ist monoton wachsend.*

Beweis: Zu einem $n \in I\!N$ wählen wir ein $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ aus. Ferner sei $E_{n+1} \in \mathrm{DIM}_{n+1}(X)$ ein Banachraum, der E_n enthält. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $F_{n+1} \in \mathrm{DIM}_{n+1}(Y)$, so daß gilt

$$d(E_{n+1}, F_{n+1}) < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_{n+1}(X, Y).$$

$T \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E_{n+1}, F_{n+1})$ sei eine lineare Bijektion mit

$$\|T\|\|T^{-1}\| < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_{n+1}(X, Y).$$

Mit T_0 bezeichnen wir die Einschränkung von T auf E_n, das Bild von T_0 sei mit F_n bezeichnet. Dann ist

$$d(E_n, F_n) \leq \|T_0\|\|T_0^{-1}\| < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_{n+1}(X, Y).$$

Demnach ist $\mathbf{a}_n(X, Y) < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_{n+1}(X, Y)$ für alle $\varepsilon > 0$. $\square$

Satz 1.9 *Für beliebige Indexmengen I und Familien von unendlichdimensionalen Banachräumen $(X_i)_{i\in I}$ und $(Y_i)_{i\in I}$ gilt*

$$\mathbf{a}_n\left([l_2(I), X_i], ([l_2(I), Y_i]\right) \leq \sup_{i\in I} \mathbf{a}_n(X_i, Y_i)\,.$$

Beweis: Wir wählen $n \in I\!N$ und $\varepsilon > 0$ aus. Weiter sei $E_n \in \mathrm{DIM}_n([l_2(I), X_i])$ und für alle $i \in I$ seien $P_i(E_n) \subseteq E_{n,i} \in \mathrm{DIM}_n(X_i)$ die kanonischen Projektionen von E_n auf die X_i. Dann existiert ein $F_{n,i} \in \mathrm{DIM}_n(Y_i)$, so daß gilt

$$d(E_{n,i}, F_{n,i}) < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_n(X_i, Y_i)\,,$$

d. h. wir finden lineare Bijektionen $T_i \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E_{n,i}, F_{n,i})$ mit

$$\|T_i\| < (1+\varepsilon)\mathbf{a}_n(X_i, Y_i) \qquad \text{und} \qquad \|T_i^{-1}\| = 1.$$

Wir definieren $T \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E_n, [l_2(I), F_{n,i}])$ durch $Tx := (T_i P_i x)_{i\in I}$. Dann ist T injektiv und

$$\|T\| = \sup_{i\in I} \|T_i\| < (1+\varepsilon) \sup_{i\in I} \mathbf{a}_n(X_i, Y_i).$$

Wir setzen nun $F_n := T(E_n)$ und betrachten T als lineare Bijektion $T \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E_n, F_n)$. Dann ist $\|T^{-1}\| = \sup_{i\in I} \|T_i^{-1}\| = 1$. Demnach ist $d(E_n, F_n) < (1+\varepsilon) \sup_{i\in I} \mathbf{a}_n(X_i, Y_i)$. Für alle $\varepsilon > 0$ wurde damit gezeigt

$$\mathbf{a}_n\left([l_2(I), X_i], [l_2(I), Y_i]\right) < (1+\varepsilon) \sup_{i\in I} \mathbf{a}_n(X_i, Y_i)\,.$$

$\square$

Offensichtlich gelten die multiplikative Dreiecksungleichung und die Sätze 1.8 und 1.9 auch für $\mathbf{s}_n(X, Y)$.

Sollte die Folge $\mathbf{a}_n(X, Y)$ beschränkt sein mit oberer Schranke C, so ist X endlich $C-$repräsentiert in Y. Das Wachstum dieser Folge ist demnach ein Maß für die „Nicht–Repräsentierbarkeit“ von X in Y.

Die folgenden Schreibweisen sind hilfreich bei der weiteren Betrachtung dieser Folgen. Wenn $a = (\alpha_n)$ und $b = (\beta_n)$ zwei Folgen positiver Zahlen bezeichnen, so schreiben wir

$$\alpha_n \prec \beta_n \qquad \text{oder auch} \qquad a \prec b\,,$$

falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß $\alpha_n \leq C\beta_n$ gilt für $n = 1, 2, \ldots$. Falls $a \prec b$ und $b \prec a$ gleichzeitig gelten, so schreiben wir auch $a \asymp b$. Mit a^c bezeichnen wir die Folge (α_n^c) für reelle Zahlen $c > 0$ und $a \cdot b$ nennen wir die Folge $(\alpha_n\beta_n)$.

Definition 1.10 *Zwei Banachräume X und Y aus L heißen* äquivalent *$(X \sim Y)$, wenn $\mathbf{s}_n(X, Y)$ beschränkt ist. $[X]$ steht für die durch X definierte Äquivalenzklasse in L.*

Die Äquivalenzklassen in L bilden eine Menge, denn $[X]$ ist eindeutig definiert durch die Folge der Teilmengen $\mathrm{DIM}_n(X)$ von M_n für $n = 1, 2, \ldots$. Diese Menge werden wir mit $[\mathsf{L}]$ bezeichnen.

Satz 1.11 [Pie]
Jede Äquivalenzklasse enthält einen separablen Banachraum.

Beweis: Wir betrachten einen beliebigen Banachraum X. Weiter sei $C > 1$. Wir wählen aus $\mathrm{DIM}_n(X) \subset \mathsf{M}_n$ ein endliches $C-$Netz $E_{n,1}, \ldots, E_{n,k_n}$, das heißt für alle $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ existiert ein $1 \leq i \leq k_n$, so daß $d(E_n, E_{n,i}) \leq C$ gilt. Mit X_0 bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle der $E_{n,i}$ mit $n = 1, 2, \ldots$ und $i = 1, \ldots, k_n$. Dann ist X_0 separabel und nach Konstruktion ist $\mathbf{s}_n(X_0, X) \leq C$. □

Satz 1.12 *Es sei $X \in \mathsf{L}$ mit $X \sim [l_2, X]$. Dann enthält $[X]$ einen reflexiven Banachraum.*

Beweis: Wir verfahren wie im Beweis zu Satz 1.11 und nehmen für X_0 nicht die abgeschlossene Hülle, sondern den reflexiven Banachraum $X_0 := [l_2, E_{n,i}]$. □

Die vollständige Beschreibung der Äquivalenzklassen ist im allgemeinen schwierig. Resultate über $[l_p]$ werden im zweiten Abschnitt vorgestellt. Insbesondere existieren einfache Charakterisierungen für $[l_2]$ und $[l_\infty]$.

Bemerkung: Eine Erweiterung der Definition des Hausdorff–Banach–Mazur–Abstandes auf endlichdimensionale Banachräume ohne Verlust wesentlicher Eigenschaften ist (wahrscheinlich) nicht möglich. Mit der naheliegenden Definition $\mathbf{a}_n(X, Y) := d(X, Y)$ für $\dim(X) = \dim(Y) = n$ ist $\mathbf{a}_n(X, Y) \leq n^{1/2}$ nicht länger allgemein gültig.

Unter Ausnutzung von $X \oplus l_2 \sim X$ (siehe Folgerung 2.12) liegt eine andere Definition für $\dim(X) < \infty$, $\dim(Y) < \infty$ nahe:

$$\mathbf{a}_n(X, Y) := \mathbf{a}_n(X \oplus l_2, Y \oplus l_2).$$

Dann wäre aber $\mathbf{a}_n(l_2^n, l_\infty^n) = 1$. Dies widerspräche der allgemeinen Definition und Vorstellung von $\mathbf{a}_n(X, Y)$.

2 l_p–Klassen

Ziel dieses Kapitels ist eine isomorphe Beschreibung der Äquivalenzklassen $[l_p]$. Im Sinne der vorliegenden Arbeit ist es naheliegend, statt der L_p–Räume die folgenden größeren Klassen von Banachräumen zu betrachten.

Definition 2.1 $1 \leq p \leq \infty$. *Ein Banachraum X heißt $\mathcal{L}_p$–*Raum*, wenn eine Zahl C existiert, so daß jeder endlichdimensionale Teilraum $E \subset X$ in einem Banachraum $E_n \in DIM_n(X)$ enthalten ist, für den $d(E_n, l_p^n) \leq C$ gilt.*

Offensichtlich ist

$$\mathcal{L}_2 = \{X : X \text{ ist isomorph zu einem Hilbertraum}\}.$$

l_p und $L_p(\mu)$ sind $\mathcal{L}_p$–Räume für $1 \leq p \leq \infty$. Deshalb und wegen ihrer Definition liegen die $\mathcal{L}_p$–Räume in $[l_p]$. Wir werden zeigen, daß $[l_p]$ für $p \neq 2$ nicht nur die $\mathcal{L}_p$–Räume enthält.

Eine Charakterisierung der separablen $\mathcal{L}_p$–Räume liefert der folgende Satz:

Satz 2.2 [For95], [LP68]
Es sei $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ und X ein separabler Banachraum. Dann ist X ein $\mathcal{L}_p$–Raum genau dann, wenn X isomorph zu einem komplementierten Teilraum eines L_p–Raumes ist und $X \not\cong l_2$.

Die Klassen $[l_2]$ und $[l_\infty]$ lassen sich leicht beschreiben:

Satz 2.3 [Pie]
Die Klasse $[l_2]$ besteht genau aus den Banachräumen, die isomorph zu einem Hilbertraum sind.

Beweis: Dieser Satz folgt aus einem Resultat von J. I. Joichi:

Satz 2.4 [Joi66]
Ein Banachraum X ist isomorph zu einem Hilbertraum genau dann, wenn es eine Konstante C gibt, so daß für alle $n \in I\!N$ und $E_n \in DIM_n(X)$ gilt:

$$d(E_n, l_2^n) \leq C.$$

Satz 2.5 [Pie]
Die Klasse $[l_\infty]$ besteht genau aus den Banachräumen, die die l_∞^n gleichmäßig enthalten.

Beweis: Bekanntlich findet man zu jedem endlichdimensionalen Banachraum E_n und $C > 1$ ein $N \in I\!N$ und einen $n-$dimensionalen Raum $F_n \subset l_\infty^N$ mit $d(E_n, F_n) \leq C$. Also ist $\mathbf{a}_n(X, l_\infty) = 1$ für jeden Banachraum X. □

Die entscheidenden Hinweise zu den folgenden Ergebnissen sind von T. Figiel (unpubliziert).

Lemma 2.6 $1 \leq p \leq \infty$. *Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $X \sim l_p$

(ii) Die l_p^n *sind gleichmäßig in* X *enthalten, und es existiert ein Maßraum* $[\Omega, \mu]$, *so daß* X *isomorph in* $L_p[\Omega, \mu]$ *enthalten ist.*

Beweis: Aus (ii) folgt offenbar (i). Für $p = \infty$ ist die Äquivalenz klar. Falls nun $X \sim l_p$ ist, so ist wegen $\mathbf{a}_n(X, l_p) \leq C$ für eine Konstante C der Banachraum X in l_p endlich repräsentiert. Bekannt ist, daß dann X isomorph in einer Ultrapotenz von l_p enthalten ist (siehe z. B. [DJT95, 8.12]). Eine Ultrapotenz von l_p ist für $1 \leq p < \infty$ isometrisch isomorph zu einem $L_p[\Omega, \mu]$ ([Lac74, S. 135], s. auch [DJT95, 8.7]). □

Ein erstes Resultat über $[l_1]$ lautet:

Satz 2.7

$$X \in [l_1] \qquad \Longrightarrow \qquad X \text{ ist nicht reflexiv.}$$

Beweis: Falls $X \sim l_1$, so ist wegen des Lemmas $X \subset L_1$. Dann ist auf X die folgende Aussage von H. P. Rosenthal anwendbar:

Lemma 2.8 [Ros73, Theorem 8]
Es sei $1 \leq p < 2$ *und* $X \subset L_p$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann ist entweder* $X \subset L_{p'}$ *für ein* $p' > p$ *oder* X *enthält einen komplementierten, zu* l_p *isomorphen Teilraum.*

Demnach hat X entweder einen Typ $p > 1$ oder einen komplementierten, zu l_1 isomorphen Teilraum. Da aber nach Voraussetzung die l_1^n gleichmäßig in X enthalten sind, kann nur die zweite Möglichkeit eintreten. Damit ist X nicht reflexiv. □

Bemerkung: Insbesondere ist also $[l_2, l_1^n] \not\sim [l_1]$. Das zeigt auch das folgende allgemeinere Resultat für $1 \leq p < 2$ [HK]:

$$\mathbf{a}_n([l_2, l_p^m], l_p) \succ n^{\frac{p}{2}(1/p-1/2)^2}.$$

Das folgende Lemma wurde erstmals von T. Figiel [Fig73, S. 209] in einem allgemeineren Zusammenhang bewiesen.

Lemma 2.9 $1 \leq p < \infty$. *Weiter sei X ein Banachraum und $C \geq 1$. Die l_p^n seien $C-$gleichmäßig in X enthalten. Dann sind die l_p^n auch $C-$gleichmäßig in jedem Teilraum $Y \subset X$ mit endlicher Kodimension enthalten.*

Beweis: Wir können o. B. d. A. annehmen, daß die Kodimension von Y gleich 1 ist. Ferner wählen wir ein $e \in X \backslash Y$ und eine natürliche Zahl n aus. Nach Voraussetzung existieren für $1 \leq k \leq n+1$ und $1 \leq i \leq n$ Elemente $x_{ki} \in X$, so daß für beliebige Zahlen $\alpha_{ki} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ki}|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}x_{ki}\right\| \leq C\left(\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ki}|^p\right)^{1/p}.$$

Die x_{ki} lassen sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$x_{ki} = y_{ki} + \xi_{ki}e\,, \qquad y_{ki} \in Y\,,\ \xi_{ki} \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen $a_k := (\xi_{ki})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Die a_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ sind linear abhängig. Also existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \xi_{ki} = 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n$$

und

$$\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k|^p = 1.$$

Wir bezeichnen

$$z_i := \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_{ki}\,, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dann ist offenbar

$$z_i = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k y_{ki} + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \xi_{ki}\right) e = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k y_{ki},$$

also gilt $z_i \in Y$. Außerdem ist für alle $a_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_k x_{ki}\right\|.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_i\lambda_k|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_i\lambda_k x_{ki}\right\| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_i\lambda_k|^p\right)^{1/p},$$

also gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right\| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}.$$

□

Eine direkte Folgerung ist

Satz 2.10 *X enthält die l_p^n gleichmäßig* $\iff$ $X \sim X \oplus l_p$.

Beweis: Für $p = \infty$ folgt die Richtigkeit aus Satz 2.5.

Die Rückrichtung ist trivial. Für die andere Richtung verwenden wir

Lemma 2.11 *Sei $C > 1$ und E_n endlicher Teilraum von X. Dann existiert ein Raum $N \subset X$ endlicher Kodimension, so daß für alle $x \in E_n$ und $y \in N$ gilt:*

$$\|x\| \leq C\|x + y\|.$$

Einen Beweis findet man z. B. in [Pie91, 4.8].

Es sei nun $G_n \in DIM_n(X \oplus l_p)$ und ein $C > 1$ gewählt. Dann existieren $E_n \in DIM_n(X)$ und $F_n \in DIM_n(l_p)$, so daß gilt

$$G_n \subset E_n \oplus F_n.$$

Ferner sei $N \subset X$ wie im Lemma bezüglich E_n. Für $x \in E_n$, $y \in N$ gilt dann

$$\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2} \leq \|x\| + \|y\| \leq C\|x + y\| + \|x + y\| + \|x\| \leq (2C + 1)\|x + y\| \leq$$

$$\leq 2^{1/2}(2C + 1)\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}.$$

Nach Voraussetzung und wegen Lemma 2.9 existiert in N ein endlichdimensionaler Teilraum N_n mit

$$d(F_n, N_n) \leq C.$$

Also ist ($E_n + N_n$ ist wegen Lemma 2.11 korrekt definierter Teilraum von X)

$$\begin{aligned} d(E_n \oplus F_n, E_n + N_n) &\leq d(E_n \oplus F_n, E_n \oplus N_n) d(E_n \oplus N_n, E_n + N_n) \\ &\leq 2^{1/2}C(2C + 1). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\mathbf{a}_n(X \oplus l_p, X) \leq 2^{1/2}C(2C + 1)$$

für alle $C > 1$. □

Hier wurde analog zum Beweis für $p = 2$ in [Pie] verfahren. Wegen des Dvoretzky–Theorems gilt

Folgerung 2.12 *Für alle Banachräume $X \in \mathsf{L}$ gilt*

$$X \sim X \oplus l_2.$$

Für die stärkere Forderung der Zugehörigkeit zu $[l_p]$ erhalten wir statt einer Äquivalenz eine isomorphe Beschreibung:

Theorem 2.13 $1 \leq p < \infty$. *Dann ist*

$$X \in [l_p] \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \cong X_0 \oplus l_p \quad \textit{mit einem Unterraum } X_0 \subseteq L_p.$$

Beweis: Die Rückrichtung ist wiederum trivial. Für die Umkehrung unterscheiden wir zwei Fälle für p neben dem einfachen Fall $p = 2$.

- $1 \leq p < 2$

  Wegen Lemma 2.6 ist $X \subset L_p$, aber wegen der Beschränktheit der Folge $\mathbf{a}_n(l_p, X)$ ist X in kein $L_{p'}$ für $p' > p$ einbettbar. Also besitzt X wegen des Rosenthal–Theorems (Lemma 2.8) einen zu l_p isomorphen, komplementierten Teilraum. Demnach ist

  $$X \cong X_0 \oplus l_p \quad \text{mit} \quad X_0 \subset X \subset L_p.$$

- $2 < p < \infty$.

  Wiederum wegen Lemma 2.6 ist $X \subset L_p$. Weiter benutzen wir das folgende

  Lemma 2.14 [KP62]
  Es sei $p > 2$ und X ein unendlichdimensionaler Teilraum von L_p. Dann ist X entweder isomorph zu l_2 oder X enthält einen zu l_p isomorphen, komplementierten Teilraum.

  Die erste Alternative ist nicht möglich, da die Folge $\mathbf{a}_n(l_p, X)$ beschränkt und $l_p \not\sim l_2$ ist. Demnach ist

  $$X \cong X_0 \oplus l_p \quad \text{mit} \quad X_0 \subset X \subset L_p.$$

$\square$

Bemerkung: Für $p \neq 2$ ist $[l_p]$ stets größer als die Klasse der $\mathcal{L}_p$–Räume, denn $l_p \oplus l_2 \in [l_p]$ ist kein $\mathcal{L}_p$–Raum. Die $[l_p]$–Klassen können groß sein, so ist für $1 < p < r < 2$

$$L_r \oplus l_p \in [l_p]\,,$$

denn L_r ist (isometrischer) Teilraum von L_p. Allerdings ist L_r nicht komplementiert, wie der folgende Satz zeigt:

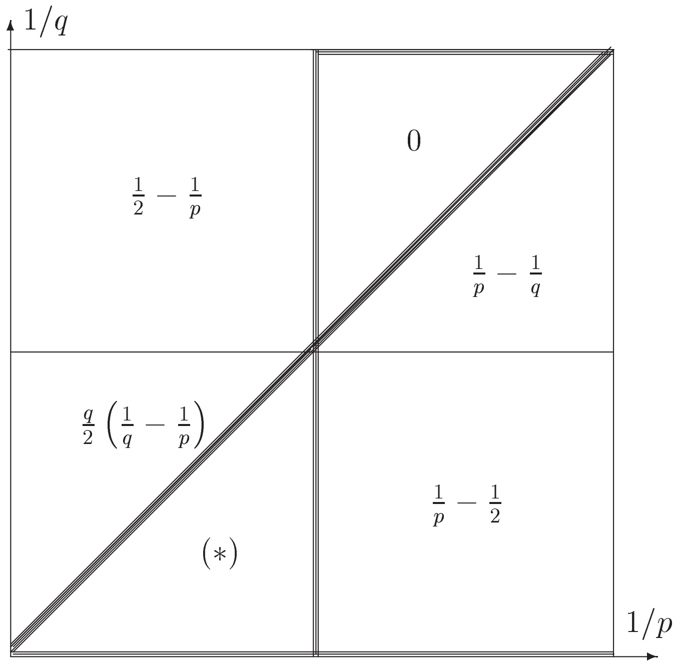
Satz 2.15 [KP62]
Es sei $1 < p < \infty$ und X ein unendlichdimensionaler, komplementierter Teilraum von L_p. Dann ist X entweder isomorph zu l_2 oder X enthält einen zu l_p isomorphen, komplementierten Teilraum.

Eine Berechnung der Hausdorff–Banach–Mazur–Abstände zwischen den l_p–Klassen findet man in [HK]. Für $1 \leq p, q \leq \infty$ gilt in allen bekannten Fällen

$$\mathbf{a}_n(l_p, l_q) \asymp n^\alpha.$$

Im folgenden Bild wird der Wert von α für die bekannten Fälle dargestellt:

Bild 2.16



Die auf den markierten Linien liegenden Fälle haben den Exponenten 0. Die Exponenten auf den anderen Linien sind die stetigen Fortsetzungen von α im Inneren.

Im Fall $(*)$ sind derzeit die folgenden Abschätzungen bekannt:

Satz 2.17 [HK] *Für $2 < p < q < \infty$ gilt*

$$n^{\frac{(1/2-1/p)(1/p-1/q)}{1/2-1/q}} \prec \mathbf{a}_n(l_p, l_q) \prec n^{\frac{p}{2}\frac{(1/2-1/p)(1/p-1/q)}{1/2-1/q}} (\log n)^{\beta}$$

für ein $\beta = \beta(p,q) > 0$.

3 Uniforme Topologien auf L

Die Ultra–Topologie auf L

Zur Vereinfachung werden wir folgende Bezeichnungen verwenden. Mit $\mathcal{M}$ oder auch $\mathcal{M}^{\mathsf{ULT}}$ bezeichnen wir die Menge aller unbeschränkten nichtfallenden Folgen (α_n) mit $\alpha_1 \geq 1$. Hilfreich werden die folgenden Bezeichnungen sein:

$$\mathcal{M}^{\mathsf{POL}} := \{a \in \mathcal{M} : \exists \varepsilon > 0 \quad \text{mit} \quad a \succ n^{\varepsilon}\}$$

und

$$\mathcal{M}^{\mathsf{LOG}} := \{a \in \mathcal{M} : \exists \varepsilon > 0 \quad \text{mit} \quad a \succ (1 + \log n)^{\varepsilon}\}\,.$$

Es gilt der folgende einfache Fakt.

Satz 3.1 *Die Mengen $\mathcal{M}^{\mathsf{ULT}}, \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}, \mathcal{M}^{\mathsf{LOG}}, \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$ und $\mathcal{M}\backslash\mathcal{M}^{\mathsf{LOG}}$ sind abgeschlossen bezüglich der Potenzbildung mit positivem Exponenten.*

Für jedes $a \in \mathcal{M}$ definieren wir $U_a := \{([X],[Y]) \in [\mathsf{L}] \times [\mathsf{L}] : \mathsf{s}_n(X,Y) \prec a\}$. Damit besitzt $[\mathsf{L}]$ eine uniforme Struktur. Die zugehörige uniforme Topologie nennen wir *Ultra–Topologie*. Eine Umgebungsbasis von $X \in \mathsf{L}$ in der Ultra–Topologie bilden demnach die Mengen

$$U_a(X) := \{Y \in \mathsf{L} : \mathsf{s}_n(X,Y) \prec a\}\,.$$

Offenbar ist diese Topologie auf der Menge der Äquivalenzklassen hausdorffsch.

Auch wenn wir hier und im folgenden Äquivalenzklassen meinen, werden wir häufig (analog zur Maßtheorie) die Schreibweise mit Repräsentanten vorziehen, d. h. wir schreiben X statt $[X]$.

Eine ausführliche Darstellung uniformer Topologien findet man z. B. in [Sch64]. Wir bemerken, daß für diese Topologien eine Reihe von Begriffen analog zur Theorie metrischer Räume definiert werden kann, die in allgemeinen topologischen Räumen keinen Sinn haben (Präkompaktheit, Vollständigkeit).

Die Ultra–Topologie werden wir auch kurz mit ULT bezeichnen, Umgebungen von X in der Ultra–Topologie mit U^{ULT}.

Uniforme Topologien lassen sich durch Systeme von Halbmetriken beschreiben (vgl. [Rin75, 30.2]). Für den folgenden Satz vereinbaren wir, das Infimum über die leere Menge gleich ∞ zu setzen.

Satz 3.2 *Für jedes $a \in \mathcal{M}$ ist*

$$d_a(X,Y) := \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mathsf{s}_n(X,Y) \prec a^{\lambda}\right\}$$

eine Halbmetrik auf L. Die Ultra–Topologie ist die durch die Familie $(d_a)_{a\in\mathcal{M}}$ erzeugte Topologie.

Beweis: Die Eigenschaften einer Halbmetrik prüft man leicht nach.

Die folgenden Mengen bilden eine Umgebungsbasis in der durch die d_a erzeugten Topologie:

$$U_\lambda^{d_a}(X) := \{Y \in \mathsf{L} : \, d_a(X,Y) \leq \lambda\}\,, \qquad \lambda > 0\,.$$

Für jedes $a \in \mathcal{M}$, $\lambda > 0$ und $X \in \mathsf{L}$ ist dann

$$U_{a^\lambda}(X) \subseteq U_\lambda^{d_a}(X) \subseteq U_{a^{\lambda+\varepsilon}}(X)$$

für alle $\varepsilon > 0$. □

Die folgenden Resultate werden zeigen, daß diese Topologie der diskreten Topologie „sehr nahe“ kommt.

Lemma 3.3 *Zu abzählbar vielen Elementen $a_1, a_2, \ldots \in \mathcal{M}$ gibt es ein $a \in \mathcal{M}$ mit*

$$a \prec a_k \qquad \textit{für} \quad k \in I\!N.$$

Beweis: Wir schreiben $a_k = (\alpha_n^{(k)})$ für $k \in I\!N$. Dann wählen wir nacheinander Zahlen $1 = n_1 < n_2 < \ldots$, so daß gilt

$$\min\{\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}\} \geq k \quad \text{ für } n \geq n_k.$$

Man setzt

$$\alpha_n := k \qquad \text{für } n_k \leq n < n_{k+1}.$$

Dann ist $a := (\alpha_n) \in \mathcal{M}$. Für festes $k \in I\!N$ und $n_k \leq n_h \leq n < n_{h+1}$ ist

$$\alpha_n = h \leq \min\{\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(h)}\} \leq \alpha_n^{(k)},$$

denn es ist $k \leq h$. Also ist $a \prec a_k$ für alle $k \in I\!N$. □

Satz 3.4 *In der Ultra–Topologie ist der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen offen (die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen).*

Beweis: $G_1, G_2, \ldots$ seien offene Mengen und $X \in \cap_{n \in I\!N} G_n$. Dann existieren $a_1, a_2, \ldots \in \mathcal{M}$, so daß gilt

$$X \in U_{a_n}(X) \subset G_n \qquad \text{für alle } n \in I\!N.$$

Nach Lemma 3.3 existiert ein $a \in \mathcal{M}$ mit $a \prec a_n$. Dann ist

$$X \in U_a(X) \subseteq \cap_{n \in I\!N} G_n,$$

der Durchschnitt ist also offen. □

Räume mit derartigen Topologien heißen *pseudo–diskret* oder *P–Räume* (siehe z. B. [GJ60, S. 62–63]).

Die folgende Eigenschaft von [L] würde für unendliche metrische Räume nur in der diskreten Topologie gelten.

Satz 3.5 *Die präkompakten Teilmengen von* $[\mathsf{L}]$ *sind die endlichen Mengen.*

Beweis: Sei $\mathsf{L}_0 \subset [\mathsf{L}]$ nicht endlich, d. h. es gibt paarweise verschiedene Elemente $X_1, X_2, \ldots \in \mathsf{L}_0$. Weiter wählen wir für $k \neq l$ Folgen $a_{kl} \in \mathcal{M}$, so daß $\mathsf{s}_n(X_k, X_l) \succ a_{kl}$ gilt. Wegen Lemma 3.3 existiert ein $a \in \mathcal{M}$, so daß $a^2 \prec a_{kl}$ und $a^2 \not\asymp a_{kl}$ für alle $k, l \in I\!N$ und $k \neq l$ gilt. Offensichtlich gibt es keine endliche Überdeckung von $\{X_k : k \in I\!N\}$ mit Mengen der Ordnung U_a, denn in jedem $U_a(X)$ kann höchstens ein Element aus dieser unendlichen Menge liegen. □

Problem: Ist $[\mathsf{L}]$ in der Ultra–Topologie vollständig?

Die Topologien POL und LOG

Weitere Topologien auf $[\mathsf{L}]$ erhält man, wenn man die Menge der die Topologie definierenden Umgebungen einschränkt. Naheliegend sind folgende Möglichkeiten:

Wir nehmen nur die Umgebungen der Form $U_a(X)$ mit $a \in \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$. Die resultierende Topologie heißt *polynomiale Topologie*.

Eine andere Topologie erzeugen die Umgebungen $U_a(X)$ mit $a \in \mathcal{M}^{\mathsf{LOG}}$. Diese Topologie wird *logarithmische Topologie* genannt. Kurz schreiben wir auch POL bzw. LOG, Umgebungen in diesen Topologien werden mit $U^{\mathsf{POL}}(X)$ bzw. $U^{\mathsf{LOG}}(X)$ bezeichnet. Diese beide Topologien sind keine Hausdorff–Topologien auf $[\mathsf{L}]$.

TOP steht in Zukunft für irgendeine der drei Topologien ULT, POL und LOG.

4 Punktuale Eigenschaften in L

Isolierte Punkte

Wir werden zunächst zeigen, daß es keine isolierten Punkte in POL gibt. Das folgende Ergebnis ist von M. I. Ostrovskii (unpubliziert).

Satz 4.1 *$[l_\infty]$ ist in POL nicht isoliert.*

Beweis: Es sei $a = (n^\alpha) \in \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$ mit $\alpha < 1/2$ und $C > 1$. Wir wählen in jeder Dimension n ein endliches $C-$Netz $E_{n,1}, \ldots, E_{n,k_n}$, d. h. für alle endlichdimensionalen Banachräume $E_n \in \mathsf{M}_n$ existiert ein $1 \le i \le k_n$ mit $d(E_n, E_{n,i}) \le C$. Ferner sei $T_{n,i} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(l_2^n, E_{n,i})$ mit

$$\|T_{n,i}\| = 1 \quad \text{und} \quad \|T_{n,i}^{-1}\| = d(l_2^n, E_{n,i}) \le n^{1/2}\,.$$

Mit der komplexen Interpolationsmethode definieren wir nun die folgenden Banachräume

$$F_{n,i} := [E_{n,i}, T_{n,i} l_2^n]_{2\alpha}\,.$$

Dann ist

$$d(E_{n,i}, F_{n,i}) \le n^\alpha.$$

Wir setzen schließlich

$$X_\alpha := [l_2, F_{n,i}]\,,$$

dabei ist $n = 1, 2, \ldots$ und $1 \le i \le k_n$. Dann ist offenbar

$$\mathbf{a}_n(l_\infty, X_\alpha) \prec n^\alpha.$$

Andererseits ist aber $X_\alpha \not\sim l_\infty$, weil für $m, n \in I\!N$ und $1 \le i \le k_n$ wegen (1.4) gilt

$$\boldsymbol{\varrho}(F_{m,i}|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) \le \boldsymbol{\varrho}(E_{m,i}|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n)^{1-2\alpha} \boldsymbol{\varrho}(l_2^m|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n)^{2\alpha} \le n^{1/2(1-2\alpha)} = n^{1/2-\alpha}.$$

Wegen der l_2-Stabilität von $\boldsymbol{\varrho}(\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n)$ ist demnach $\boldsymbol{\varrho}(X_\alpha|\mathcal{R}_n, \mathcal{I}_n) \le n^{(1-\alpha)-1/2}$. Also hat X_α wegen der Bemerkung auf Seite 7 einen Typ $p > 1$. □

Theorem 4.2 *In der polynomialen Topologie besitzt $[\mathsf{L}]$ keine isolierten Punkte.*

Beweis: Es bleibt der Fall $X \not\sim l_\infty$ zu untersuchen, d. h. es ist $q(X) < \infty$. Wegen des Maurey–Pisier–Theorems und Satz 2.10 gilt $X \oplus l_{q(X)} \sim X$. Für $q(X) < q' < q$ ist wegen des folgenden Lemmas 4.3

$$n^{1/q'-1/q} \prec \mathbf{a}_n(X \oplus l_q, X).$$

Es sei nun $a = (n^\alpha) \in \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$. Wegen Bild 2.16 können wir ein $q > q(X)$ bestimmen, so daß gilt

$$\mathbf{a}_n(l_q, l_{q(X)}) \prec n^\alpha.$$

Also ist wegen Satz 1.9

$$\mathbf{a}_n(X \oplus l_q, X) \asymp \mathbf{a}_n(X \oplus l_q, X \oplus l_{q(X)}) \prec \mathbf{a}_n(l_q, l_{q(X)}) \prec n^\alpha.$$

Damit ist $X \oplus l_q \in U_a(X)$. □

Wir werden nun zeigen, daß $[l_\infty]$ isolierter Punkt in LOG ist. Dafür benötigen wir folgendes Lemma, das von allgemeinerem Interesse ist.

Lemma 4.3 [Pie]
$2 \leq q \leq r \leq \infty$. *Ferner enthalte* X *die* l_r^n *gleichmäßig und es sei* $\boldsymbol{\varrho}(Y|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \prec n^{1/2-1/q}$. *Dann ist*

$$n^{1/q-1/r} \prec \mathbf{a}_n(X, Y).$$

Beweis: Es sei $F_n \in \mathrm{DIM}_n(Y)$ und $T \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(l_r^n, F_n)$ eine Bijektion, so daß gilt:

$$\|T\|\|T^{-1}\| = d(l_r^n, F_n).$$

Dann ist

$$n^{1/2-1/r} = \boldsymbol{\varrho}(l_r^n|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n) \leq \|T^{-1}\|\boldsymbol{\varrho}(F_n|\mathcal{I}_n, \mathcal{R}_n)\|T\| \prec n^{1/2-1/q} d(l_r^n, F_n).$$

Also gilt

$$n^{1/q-1/r} \prec \inf_{F_n} d(l_r^n, F_n) \leq \mathbf{a}_n(X, Y).$$

□

Eine einfache Folgerung ist

Satz 4.4 $[l_\infty]$ *ist isoliert in* LOG .

Beweis: Es sei X ein Banachraum mit $X \not\succ l_\infty$. Dann besitzt X wegen Satz 2.5 und des Maurey–Pisier–Theorems einen Cotyp $q < \infty$. Also ist wegen der Relation (1.3)

$$n^{1/q} \prec \mathbf{a}_n(l_\infty, X).$$

□

Problem: Gibt es weitere isolierte Punkte in LOG oder ULT ?

Folgen lokaler Parameter

Im folgenden werden wir sehen, daß bekannte Klassen von Banachräumen in ULT keine isolierten Punkte enthalten.

Definition 4.5 (vgl. [Pie])
Wir nennen die Funktion $\boldsymbol{\gamma}_n : \mathsf{L} \to (0,\infty)$ *einen* $n-$lokalen Parameter, *falls die Bedingung*

$$\boldsymbol{\gamma}_n(X) \le \mathbf{s}_n(X,Y)\boldsymbol{\gamma}_n(Y)$$

erfüllt ist für alle $X, Y \in \mathsf{L}$.

$\boldsymbol{\gamma}_n$ *heißt* monoton, *falls für alle Banachräume* $X, Y \in \mathsf{L}$ *gilt*

$$\boldsymbol{\gamma}_n(X) \le \boldsymbol{\gamma}_n(X \oplus Y)\,.$$

Wir betrachten nun Folgen lokaler Parameter auf L.

Beispiele: Folgen monotoner lokaler Parameter sind:

$\boldsymbol{\gamma}_n(X) := \mathbf{a}_n(X, X_0)$ (für festes $X_0 \in \mathsf{L}$) ,

$\boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$,

$\boldsymbol{\kappa}_n(X)$,

$\mathbf{v}_n^{max}(X)$ und $\mathbf{v}_n^{min}(X)$.

Nichtmonotone Beispiele sind:

$\boldsymbol{\gamma}_n(X) := \mathbf{a}_n(X_0, X)$ (für festes $X_0 \in \mathsf{L}$) ,

$\boldsymbol{\gamma}_n(X) := \mathbf{a}_n(X \oplus X, X)^{1/2}$,

$\boldsymbol{\gamma}_n(X) := \mathbf{a}_n([l_2, X], X)^{1/2}$ und

$\boldsymbol{\lambda}_n^{(r)}(X) := \inf d(l_r^n, E_n)$, $(E_n \in \mathrm{DIM}_n(X))$.

Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

$$\mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n] := \{X \in \mathsf{L} : (\boldsymbol{\gamma}_n(X)) \text{ ist beschränkt}\}\,.$$

Wir werden nur solche $(\boldsymbol{\gamma}_n)$ betrachten, für die $\mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ nichtleer ist. Insbesondere ist dann für Folgen monotoner lokaler Parameter $l_2 \in \mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n]$: Falls $\boldsymbol{\gamma}_n(X)$ für ein $X \in \mathsf{L}$ beschränkt ist, so ist

$$\boldsymbol{\gamma}_n(l_2) \le \boldsymbol{\gamma}_n(X \oplus l_2) \le \mathbf{s}_n(X \oplus l_2, X)\boldsymbol{\gamma}_n(X),$$

also ist wegen Folgerung 2.12 auch $\boldsymbol{\gamma}_n(l_2)$ beschränkt.

Folgen lokaler Parameter sind mit unserem Äquivalenzbegriff verträglich, denn es gilt für $X \sim Y$ die folgende Äquivalenz:

$$X \in \mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n] \iff Y \in \mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n]\,.$$

Für eine Folge lokaler Parameter $(\boldsymbol{\gamma}_n)$ bezeichnen wir mit

$$\cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n] := \left\{X \in \mathsf{L} : \boldsymbol{\gamma}_n(X) \prec a,\ \forall a \in \mathcal{M}^{\mathsf{TOP}}\right\}\,.$$

Offenbar ist $\cap^{\mathsf{ULT}}[\boldsymbol{\gamma}_n] = \mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n]$.

Satz 4.6 (vgl. [Pie])
$\cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ ist TOP–abgeschlossen.

Beweis: Es sei $X_0 \notin \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. Wir definieren $a = (\alpha_n)$ durch

$$\alpha_n^2 := \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X_0), \quad \alpha_n > 0.$$

Dann ist $a \in \mathcal{M}^{\mathsf{TOP}}$ und es existiert eine Umgebung $U^{\mathsf{TOP}}(X_0)$, so daß für $X \in U^{\mathsf{TOP}}(X_0)$ gilt

$$\mathbf{s}_n(X, X_0) \prec a.$$

Also ist

$$\boldsymbol{\gamma}_m(X_0) \leq \mathbf{s}_m(X_0, X)\boldsymbol{\gamma}_m(X) \prec \alpha_m \boldsymbol{\gamma}_m(X),$$

demnach gilt

$$\alpha_n^2 = \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X_0) \prec \alpha_n \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X).$$

Folglich ist $a \prec \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X)$. Wegen $a \in \mathcal{M}^{\mathsf{TOP}}$ ist also $X \notin \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ für alle $X \in U^{\mathsf{TOP}}(X_0)$. $\square$

Theorem 4.7 *Es sei $(\boldsymbol{\gamma}_n)$ eine Folge monotoner lokaler Parameter und l_2 ein TOP–Randpunkt von $\mathsf{L} \setminus \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. Dann besitzt $\cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ keine TOP–inneren Punkte.*

Beweis: Wir nehmen an, X sei ein TOP–innerer Punkt von $\cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$, d. h. es existiert ein $a \in \mathcal{M}^{\mathsf{TOP}}$, so daß gilt $U_a(X) \subseteq \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. Nach Voraussetzung existiert ein Banachraum $X_a \notin \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ mit

$$\mathbf{s}_n(X_a, l_2) \prec a.$$

Wir definieren $b = (\beta_n) \in \mathcal{M}$ durch

$$\beta_n^2 := \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X_a)\,.$$

Wegen $X_a \notin \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ ist dann $b \in \mathcal{M}^{\mathsf{TOP}}$. Weiter ist wegen Satz 1.9

$$\mathbf{s}_n(X \oplus X_a, X) \prec a.$$

Andererseits ist wegen der Monotonie von $\boldsymbol{\gamma}_n$

$$b \prec \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X_a) \prec \max_{m \leq n} \boldsymbol{\gamma}_m(X \oplus X_a),$$

also ist $X \oplus X_a \notin \cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. Damit ist X kein TOP–innerer Punkt von $\cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. $\square$

Bemerkung: Insbesondere besitzt damit $\cap^{\mathsf{TOP}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$ keine TOP–isolierten Punkte.

Im folgenden werden wir dieses Theorem für einige bekannte lokale Parameter in den Topologien ULT und POL anwenden.

Lemma 4.8 [Pie, 11.1, 11.2] *Es sei* $(\boldsymbol{\gamma}_n)$ *eine Folge lokaler Parameter der Form*

$$\boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{R}_n,\mathcal{I}_n),\ \boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{I}_n,\mathcal{R}_n),\ \boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{C}_n,\mathcal{S}_n),\ \mathbf{v}_n^{max}(X)\ \ \textit{oder}\ \ \mathbf{v}_n^{min}(X).$$

Dann ist l_2 *ein* $\mathsf{ULT}-$*Randpunkt von* $\mathsf{L}\backslash\mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n]$.

Die folgenden Definitionen wurden aus [Pie] übernommen. Zur Bezeichnung der auftretenden Orthonormalsysteme siehe Seite 7.

Definition 4.9 *Wir bezeichnen mit*

$\mathsf{RT_2}^{weak} := \mathsf{L}[\mathbf{v}_n^{min}]$:	*Banachräume mit schwachem Rademacher–Typ* 2
$\mathsf{RC_2}^{weak} := \mathsf{L}[\mathbf{v}_n^{max}]$:	*Banachräume mit schwachem Rademacher–Cotyp* 2
$\mathsf{AT_2} := \mathsf{L}[\boldsymbol{\varrho}(\mathcal{H}_n,\mathcal{I}_n)]$:	2−*glättbare Banachräume*
$\mathsf{AC_2} := \mathsf{L}[\boldsymbol{\varrho}(\mathcal{I}_n,\mathcal{H}_n)]$:	2−*konvexifizierbare Banachräume*
$\mathsf{UMD} := \mathsf{L}[\boldsymbol{\varrho}(\mathcal{C}_n,\mathcal{S}_n)]$:	*UMD–Räume.*

Die schwachen Hilberträume sind demnach gerade die Banachräume mit schwachem Typ 2 und schwachem Cotyp 2.

Theorem 4.10 *Die folgenden Klassen von Banachräumen enthalten keine inneren (und damit keine isolierten) Punkte in* ULT *:*

(1) Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Typ 2*,*

(2) Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Cotyp 2*,*

(3) Schwache Hilberträume,

(4) UMD–Räume,

(5) 2−*konvexifizierbare und* 2−*glättbare Banachräume.*

Beweis: Die Richtigkeit der Aussagen (1) bis (4) folgt aus Lemma 4.8 wegen Theorem 4.7 und der Beispiele nach Definition 4.5. Aussage (5) gilt wegen $\mathsf{AT_2} \subseteq \mathsf{RT_2}$ und $\mathsf{AC_2} \subseteq \mathsf{RC_2}$ [PW, 7.5.16]. □

Bemerkungen: Damit sind alle diese Klassen nirgends dicht in ULT wegen ihrer Abgeschlossenheit (Lemma 4.6).

Wir beweisen ein analoges Theorem für die polynomiale Topologie.

Lemma 4.11 *Es sei* $(\boldsymbol{\gamma}_n)$ *eine Folge lokaler Parameter der Form*

$$\boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{R}_n,\mathcal{I}_n),\ \boldsymbol{\varrho}(X|\mathcal{I}_n,\mathcal{R}_n),\ \boldsymbol{\kappa}_n(X),\ \mathbf{v}_n^{max}(X)\ \ \textit{oder}\ \ \mathbf{v}_n^{min}(X).$$

Dann ist l_2 $\mathsf{POL}-$*Randpunkt von* $\mathsf{L}\backslash\cap^{\mathsf{POL}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$.

Beweis: Man findet in jeder POL–Umgebung von l_2 einen Banachraum l_p mit $p \neq 2$. $\square$

Theorem 4.12 *Die folgenden Klassen von Banachräumen sind nirgends dicht in* POL *:*

(1) Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Typ 2

(2) Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Cotyp 2

(3) Schwache Hilberträume.

(4) 2*–konvexifizierbare und* 2*–glättbare Banachräume.*

Beweis: Es gilt $\mathsf{L}[\boldsymbol{\gamma}_n] \subseteq \cap^{\mathsf{POL}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. Man betrachte also jeweils die abgeschlossene Menge $\cap^{\mathsf{POL}}[\boldsymbol{\gamma}_n]$. $\square$

Problem: Ist die Klasse der UMD–Räume nirgends dicht in POL?

Bemerkung: Für die UMD–Räume können wir nicht genauso verfahren, denn es ist $\cap^{\mathsf{POL}}[\boldsymbol{\varrho}(\mathcal{C}_n, \mathcal{S}_n)] = \mathsf{L}$ (siehe [PW, 5.2.32 und 5.2.34]).

Beispiele für $X \oplus X \not\sim X$

Es gibt Banachräume, die nicht isomorph ihrem kartesischen Quadrat sind. Ein Beispiel wurde von T. Figiel [Fig72] konstruiert. Die dort verwendeten Techniken werden benutzt, um eine Äquivalenzklasse X in L zu finden, so daß $X \oplus X \not\sim X$ gilt. Die erste Konstruktion (Satz 4.13) wurde von A. Hinrichs durchgeführt (unpubliziert). Wir werden dann zeigen, daß der Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand zwischen $X \oplus X$ und X „groß“ sein kann (jedes $a \notin \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$ kann überschritten werden) und Beispiele in beliebiger Nähe von l_2 konstruieren. Da die Folge lokaler Parameter

$$\boldsymbol{\gamma}_n : X \to \mathbf{a}_n(X \oplus X, X)^{1/2}$$

nicht monoton ist, bleibt jedoch die folgende Frage offen:

Problem: Besitzt $\{X : X \oplus X \not\sim X\}$ innere Punkte?

Satz 4.13 *Es sei* (n_k) *eine Folge natürlicher Zahlen mit*

$$2 \sum_{j=1}^{k-1} n_j \leq n_k \quad \textit{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

und (q_k) *eine fallende Folge reeller Zahlen mit* $2 < q_k < \infty$. *Dann gilt für* $X := \left[l_2, l_{q_k}^{2n_k} \right]$

$$\mathbf{a}_{4n_k}(X \oplus X, X) \succ n_k^{1/q_{k+1} - 1/q_k} .$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{4n_k}(X\oplus X,X) &\geq \inf\left\{d(l_{q_k}^{2n_k}\oplus l_{q_k}^{2n_k},E_{4n_k}):\, E_{4n_k}\in \mathrm{DIM}_{4n_k}(X)\right\}\\ &\geq 2^{-1/2}\inf\left\{d(l_{q_k}^{4n_k},E_{4n_k}):\, E_{4n_k}\in \mathrm{DIM}_{4n_k}(X)\right\}.\end{aligned}$$

Wir fixieren k und wählen ein $E\in\mathrm{DIM}_{4n_k}(X)$. Es sei $T\in\boldsymbol{\mathcal{L}}(l_{q_k}^{4n_k},E)$ ein Isomorphismus. Weiter bezeichnen wir mit P_j die Einschränkung der orthogonalen Projektionen von X nach $l_{q_j}^{2n_j}$ auf $E\subset X$. Wir definieren $F\subset l_{q_k}^{4n_k}$ wie folgt:

$$F:=\cap_{j=1}^k N(P_jT).$$

Nach Voraussetzung an die n_k gilt somit

$$\dim(F)\geq\dim(l_{q_k}^{4n_k})-\sum_{j=1}^k\mathrm{rank}(P_j)\geq 4n_k-2\sum_{j=1}^k n_j\geq n_k.$$

Wir bezeichnen mit

$$X^{(k)}:=\bigoplus_{j>k} l_{q_j}^{2n_j}.$$

Dann ist $T(F)\subset X^{(k)}$. Also gilt

$$\|T\|\|T^{-1}\|\geq d(F,T(F))\geq\inf\left\{d(G,H):\, G\in\mathrm{DIM}_{n_k}(l_{q_k}^{4n_k}),H\in\mathrm{DIM}_{n_k}(X^{(k)})\right\}.$$

Damit ist

$$\mathbf{a}_{4n_k}(X\oplus X,X)\geq\frac{\inf\left\{\boldsymbol{\varrho}(G|\mathcal{I}_{n_k},\mathcal{R}_{n_k}):\, G\in\mathrm{DIM}_{n_k}(l_{q_k}^{4n_k})\right\}}{2^{1/2}\boldsymbol{\varrho}(X^{(k)}|\mathcal{I}_{n_k},\mathcal{R}_{n_k})}.$$

Wegen der l_2-Stabilität der Cotyp–Idealnorm ist

$$\boldsymbol{\varrho}(X^{(k)}|\mathcal{I}_{n_k},\mathcal{R}_{n_k})=\sup_{j>k}\boldsymbol{\varrho}(l_{q_j}^{2n_j}|\mathcal{I}_{n_k},\mathcal{R}_{n_k})=n_k^{1/2-1/q_{k+1}}.$$

Für den Abstand zum Hilbertraum schreiben wir kurz

$$d_F:=d\left(F,l_2^{dim(F)}\right).$$

Für eine untere Abschätzung des Zählers benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 4.14 [MS86, 9.6]
Es existiert ein $C_1>0$, so daß für jedes $m\in\mathbb{N}$ und jeden $m-$dimensionalen Banachraum G ein Teilraum $F\subset G$ existiert, so daß gilt

$$\dim(F)\geq C_1\boldsymbol{\varrho}(G|\mathcal{I}_m,\mathcal{R}_m)^{-2}m\qquad\textit{und}\qquad d_F\leq 2.$$

Lemma 4.15 [MS86, 5.4]
Zu $q>2$ existiert eine Konstante C_2, so daß für Banachräume $F\subset l_q^n$ mit $d_F\leq 2$ gilt

$$\dim(F)\leq C_2n^{2/q}.$$

Damit gibt es für $G \in \mathrm{DIM}_m(l_q^n)$ ein F entsprechend Lemma 4.14. Dieses F erfüllt dann auch die Voraussetzungen des Lemmas 4.15. Also ist

$$\boldsymbol{\varrho}(G|\mathcal{I}_m, \mathcal{R}_m)^2 \geq \frac{C_1 m}{C_2 n^{2/q}},$$

also existiert eine Konstante $C > 0$, so daß gilt

$$\boldsymbol{\varrho}(G|\mathcal{I}_m, \mathcal{R}_m) \geq C \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} n^{1/2-1/q}.$$

Setzen wir nun $m := n_k$ und $n := 4n_k$, so erhalten wir

$$\mathbf{a}_{4n_k}(X \oplus X, X) \geq C' n_k^{1/q_{k+1}-1/q_k}.$$

□

Bemerkung: Für unsere Zwecke kann X auch eine allgemeinere Gestalt haben mit Komponenten E_{2n_j} statt $l_{q_j}^{2n_j}$. Aus dem Beweis gehen die notwendigen Bedingungen an E_{2n_j} hervor:

$$\boldsymbol{\varrho}(E_{2n_j}|\mathcal{I}_m, \mathcal{R}_m) \leq C n_j^{1/2-1/q_j}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

und für jedes $F \subset E_{2n_j}$ mit $d_F \leq 2$ muß gelten

$$\dim(F) \leq n^{2/q_j}.$$

Diese Bedingungen sind scharf in folgendem Sinn: Die erste Forderung impliziert die Existenz eines Teilraumes $F \subset E_{2n_j}$ mit $d_F \leq 2$ und $\dim(F) \geq C' n^{2/q_j}$ [Mas88, S. 89].

Mit Satz 4.13 können wir nun zeigen:

Theorem 4.16 *Zu jedem $a \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$ existiert ein Banachraum X, so daß gilt*

$$X \oplus X \notin U_a(X).$$

Beweis: Es sei $a = (\alpha_n) \notin \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$. Wir wählen eine fallende Folge positiver Zahlen (ε_k) mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{1}{4}.$$

Weiter sei n_k induktiv so gewählt, daß gilt

$$1 < \alpha_{4n_k} \leq n_k^{\varepsilon_k} \qquad \text{und} \qquad 2 \sum_{j=1}^{k-1} n_j \leq n_k.$$

Nun berechnen wir q_1 aus

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \alpha_{4n_k}}{\log n_k}.$$

Offenbar ist $2 < q_1 < \infty$. Wir wählen induktiv q_{k+1}, so daß gilt

$$\frac{1}{q_{k+1}} - \frac{1}{q_k} = 2\frac{\log \alpha_{4n_k}}{\log n_k}.$$

Da die rechte Seite positiv ist, ist (q_k) eine fallende Folge und es ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{q_{k+1}} = \frac{1}{q_k} + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{q_{j+1}} - \frac{1}{q_j} \right) = \frac{1}{q_1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \alpha_{4n_k}}{\log n_k} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist $2 < q_k < \infty$ und wegen Satz 4.13 ist

$$\mathbf{a}_{4n_k}(X \oplus X, X) \succ n_k^{1/q_{k+1}-1/q_k} = \alpha_{4n_k}^2,$$

wenn wir $X = [l_2, l_{q_k}^{2n_k}]$ setzen. □

Wir kommen nun zu dem im Vorspann dieses Abschnittes angekündigten Resultat.

Theorem 4.17 *Zu jedem $a \in \mathcal{M}$ existiert ein Banachraum $X \in U_a(l_2)$, so daß gilt*

$$X \oplus X \not\sim X.$$

Beweis: Der zu konstruierende Raum wird die Gestalt $X = [l_2, l_{p_k}^{n_k}]_{k=1}^{\infty}$ haben mit einer fallenden, gegen 2 konvergierenden Folge (p_k) und

$$n_k^{1/2-1/p_k} \leq n_{k+1}^{1/2-1/p_{k+1}}.$$

Es gilt wegen der l_2-Stabilität von $\mathbf{a}_n$ (Satz 1.9) für festes $n \in I\!N$

$$\mathbf{a}_n(X, l_2) \leq \sup_k \mathbf{a}_n(l_{p_k}^{n_k} \oplus l_2, l_2).$$

Falls $n \leq n_k$ gilt, so ist für alle $2 < p < \infty$

$$\mathbf{a}_n(l_p^{n_k} \oplus l_2, l_2) = d(l_p^n, l_2^n) = n^{1/2-1/p}.$$

Falls $n > n_k$ gilt, so ist

$$\mathbf{a}_n(l_p^{n_k} \oplus l_2, l_2) = d(l_p^{n_k} \oplus l_2^{n-n_k}, l_2^n) = {n_k}^{1/2-1/p}.$$

Es bezeichne $k_0 := \min\{k \in I\!N : n_k \geq n\}$. Dann gilt

$$\mathbf{a}_n(X, l_2) \leq \left\{ \sup_{n_k < n} n_k^{1/2-1/p_k}, \sup_{n_k \geq n} n^{1/2-1/p_k} \right\} = \max \left\{ n_{k_0-1}^{1/2-1/p_{k_0-1}}, n^{1/2-1/p_{k_0}} \right\}.$$

Deswegen und wegen Satz 4.13 genügt zum Beweis des Theorems, das folgende Lemma zu zeigen:

Lemma 4.18 *Es sei $a = (\alpha_n) \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$. Dann existiert eine Folge natürlicher Zahlen (n_k) und eine fallende und gegen 2 konvergierende Folge (p_k) mit den folgenden Eigenschaften für alle $k \in I\!N$:*

(i)

$$2\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right) \le n_k$$

(ii)

$$n_{k+1}^{1/2-1/p_{k+1}} \le \alpha_{n_k}$$

(iii)

$$n_k^{1/2-1/p_k} \le n_{k+1}^{1/2-1/p_{k+1}}$$

(iv)

$$\lim_{k\to\infty} n_k^{1/p_{k+1}-1/p_k} = \infty.$$

Insbesondere ist also wegen (ii) für $k_0 > 2$

$$n_{k_0-1}^{1/2-1/p_{k_0-1}} \le \alpha_{n_{k_0-2}} \le \alpha_{n_{k_0-1}} \le \alpha_n$$

und nach Definition von k_0

$$n^{1/2-1/p_{k_0}} \le n_{k_0}^{1/2-1/p_{k_0}} \le \alpha_{n_{k_0-1}} \le \alpha_n,$$

demnach ist für $n > n_2$

$$\mathbf{a}_n(X, l_2) \le \alpha_n.$$

Beweis des Lemmas: Die n_k und p_k werden induktiv gewählt.

Zunächst sei $n_1 \ge 2$. Weiter sei $p_1 > 2$ gewählt mit

$$\frac{1}{2} - \frac{\log \alpha_{n_1}}{2 \log n_1} \le \frac{1}{p_1}. \tag{4.1}$$

Es seien nun $n_1, \dots, n_k$ und $p_1, \dots, p_k > 2$ bereits gewählt, so daß (i) aus dem Lemma erfüllt ist und für $k \ge 2$ gilt

$$\frac{1}{2} - \frac{\log \alpha_{n_{k-1}}}{\log n_k} \le \frac{1}{p_k} \qquad \text{und} \qquad \alpha_{n_{k-1}}^2 \le \alpha_{n_k}. \tag{4.2}$$

Wir werden n_{k+1} und p_{k+1} so konstruieren, daß (i), (ii) und (iii) aus dem Lemma sowie die Ungleichungen (4.2) für $k := k+1$ erfüllt sind. Schließlich werden wir für die so gefundenen Zahlenfolgen die Richtigkeit von (iv) zeigen.

Wir wählen n_{k+1} hinreichend groß, so daß folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$n_k^4 \le n_{k+1} \qquad \text{und} \qquad \alpha_{n_k}^2 \le \alpha_{n_{k+1}}. \tag{4.3}$$

p_{k+1} genüge nun der Forderung

$$\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{\log \alpha_{n_k}}{\log n_{k+1}}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2p_k}\right\} \le \frac{1}{p_{k+1}} \le \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}\right)\frac{\log n_k}{\log n_{k+1}}. \tag{4.4}$$

Die Existenz eines solchen $p_{k+1} > 2$ ist gesichert, denn wegen (4.3) ist

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2p_k} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}\right) \leq \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}\right)\frac{\log n_k}{\log n_{k+1}},$$

und wegen (4.2) ist für $k \geq 2$

$$\frac{1}{2} - \frac{\log \alpha_{n_k}}{2\log n_k} \leq \frac{1}{2} - \frac{\log \alpha_{n_{k-1}}}{\log n_k} \leq \frac{1}{p_k}.$$

Also gilt

$$2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}\right)\log n_k \leq \log \alpha_{n_k},$$

womit die Relation (4.4) für alle $k \geq 2$ Zahlen p_{k+1} liefert. Die Existenz eines passenden p_2 in Ungleichung (4.4) ist wegen (4.1) und $n_1^4 \leq n_2$ gesichert.

Insbesondere erfüllt ein solches p_{k+1} die Bedingung (4.2), wenn wir für k die Zahl $k+1$ einsetzen.

Aus (4.4) folgt weiterhin

$$2 < p_{k+1} < p_k.$$

Wegen $a \notin \mathcal{M}^{\mathsf{POL}}$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log \alpha_{n_k}}{\log n_{k+1}} = 0,$$

also gilt

$$\lim_{k\to\infty} p_{k+1} = 2.$$

Es bleibt, die Eigenschaften (i) bis (iv) des Lemmas zu zeigen.

Die Bedingung (i) ist offensichtlich wegen (4.3): Falls bereits $n_k \geq 2\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right)$ gilt, so ist

$$n_{k+1} \geq n_k^4 \geq 2^3 n_k > 2n_k + 2\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right) = 2\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right).$$

Weiter gilt (ii) wegen (4.4):

$$n_{k+1}^{1/2-1/p_{k+1}} \leq \alpha_{n_k}.$$

Die Richtigkeit von (iii) sieht man mit (4.4) wie folgt:

$$\begin{aligned} n_{k+1}^{1/2-1/p_{k+1}} &\geq n_{k+1}^{2(1/2-1/p_k)\frac{\log n_k}{\log n_{k+1}}} \\ &= \left(n_k^{1/2-1/p_k}\right)^2 > n_k^{1/2-1/p_k} > 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{k\to\infty} n_k^{1/2-1/p_k} = \infty.$$

Wegen (4.4) ist dann

$$n_k^{1/p_{k+1}-1/p_k} \geq n_k^{1/4-1/2p_k} = n_k^{1/2(1/2-1/p_k)},$$

also ist auch

$$\lim_{k\to\infty} n_k^{1/p_{k+1}-1/p_k} = \infty.$$

□

5 Beispiele

Eine Eigenschaft von Banachverbänden mit endlichem Cotyp

Ziel der folgenden Abschnitte wird die Abschätzung des Hausdorff–Banach–Mazur–Abstandes zwischen bekannten Klassen von Banachräumen sein, etwa Banachverbänden und Schatten–von Neumann–Räumen. Dazu benötigen wir eine geeignete Folge lokaler Parameter.

Definition 5.1 *Es sei X ein Banachraum und $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit*

$$\boldsymbol{\varrho}_{\pm}\left(X|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right)$$

die kleinste aller Zahlen C mit folgender Eigenschaft:

Für n^2–Tupel $x_{ij} \in X$ und $\varepsilon_{ij} \in \{\pm 1\}$ gilt

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^2 dsdt\right)^{1/2} \le C \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) x_{ij} \right\|^2 dsdt\right)^{1/2} .$$

Man zeigt leicht, daß diese Zahlen eine Folge lokaler Parameter auf L bilden und monoton wachsend mit n sind. Für $X \subset Y$ gilt außerdem

$$\boldsymbol{\varrho}_{\pm}\left(X|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right) \le \boldsymbol{\varrho}_{\pm}\left(Y|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right) .$$

Eine Darstellung der Theorie der Banachverbände findet man in [LT79, Band II]. Wir benötigen einige Begriffe. In jedem Banachverband X gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$. Diese Eigenschaft heißt $1-$*Konvexität*.

Definition 5.2 $1 \le q < \infty$. *Ein Banachverband heißt $q-$*konkav, *falls eine Konstante C existiert, so daß gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \le C \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen Cotyp und $q-$Konkavität.

Satz 5.3 [LT79, II, 1.f.9]
Falls X Cotyp $q \ge 2$ hat, dann ist X $r-$ konkav für alle $r > q$.

Es sei $0 < r \leq s < \infty$ und f eine $\mu \times \nu-$meßbare Funktion auf einer Menge $M \times N$. Dann gilt

$$\left[\int_N \left(\int_M |f(s,t)|^r \, d\mu(s)\right)^{s/r} d\nu(t)\right]^{1/s} \leq \left[\int_M \left(\int_N |f(s,t)|^s \, d\nu(t)\right)^{r/s} d\mu(s)\right]^{1/r}.$$

Diese Ungleichung ist bekannt als Jessen–Ungleichung (siehe [Jes33]).

Satz 5.4 *X sei ein Banachverband mit endlichem Cotyp. Dann gibt es ein $C > 0$, so daß gilt*

$$\boldsymbol{\varrho}_{\pm}\left(X|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right) \leq C$$

für alle $n \in I\!N$.

Beweis: Wir wählen eine Zahl q mit $2 \leq q(X) < q < \infty$. Dann ist X nach Satz 5.3 $q-$konkav, das heißt es gibt eine Zahl $M_q < \infty$, so daß für beliebige n^2 Elemente $x_{ij} \in X$, und $\varepsilon_{ij} \in \{\pm 1\}$, $(1 \leq i, j \leq n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^2 dsdt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^q dsdt\right)^{1/q} \\
&\leq M_q \left\| \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} x_{ij} \right|^q dsdt\right)^{1/q} \right\|
\end{aligned}$$

Mit dem Absolutbetrag in Banachverbänden kann man wie im skalaren Fall rechnen (vgl. [LT79, II, 1.d]). Zweimalige Anwendung der Khintchine–Ungleichung (Satz 1.4) ergibt:

$$\left\| \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} x_{ij} \right|^q dsdt\right)^{1/q} \right\| \leq B_q^2 \left\| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2\right)^{1/2} \right\|.$$

Wegen der Khintchine–Ungleichung und Jessen–Ungleichung ist

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2\right)^{1/2} \right\| &\leq A_1^{-1} \left\| \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_{ij} \right| dt\right)^2\right)^{1/2} \right\| \\
&\leq A_1^{-1} \left\| \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_{ij} \right|^2\right)^{1/2} dt \right\| \\
&\leq A_1^{-2} \left\| \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) x_{ij} \right| dsdt \right\|
\end{aligned}$$

$$\leq \quad A_1^{-2} \int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) x_{ij} \right\| dsdt$$

$$\leq \quad A_1^{-2} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) x_{ij} \right\|^2 dsdt \right)^{1/2}$$

wegen der $1-$Konvexität. Also ist

$$\varrho_{\pm}\left(X|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right) \leq M_q B_q^2 A_1^{-2}.$$

□

Bemerkung: Tatsächlich gilt diese Aussage für alle Banachräume X mit endlichem Cotyp und mit lokal unbedingter Struktur. Der Beweis dieser allgemeineren Situation ist komplizierter [Pis78].

Schatten–von Neumann–Klassen

Ein wichtiges Beispiel von Banachräumen sind die Schatten–von Neumann–Klassen C_p.

Definition 5.5 *Es seien H_1 und H_2 Hilberträume mit endlichen oder abzählbaren Orthonormalsystemen $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I}$. Weiter sei $1 \leq p < \infty$. Der Operator $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ besitze die Orthonormaldarstellung*

$$Tx = \sum_{i\in I} \tau_i (x, e_i) f_i \qquad \textit{für} \quad x \in H_1$$

mit Zahlen $\tau_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $T \in C_p(H_1, H_2)$, falls gilt $\sum_{i\in I} |\tau_i|^p < \infty$. Mit

$$\|T|C_p\| := \left(\sum_{i\in I} |\tau_i|^p \right)^{1/p}$$

*bezeichnet man die $p-$*te Schatten–von Neumann Norm. *Man bezeichnet mit C_∞ die Klasse der kompakten Operatoren mit der gewöhnlichen Operatornorm.*

Für eine unitäre Matrix A (das heißt $A^*A = I$) aus $\mathcal{L}(l_2^n)$ gilt [McC67]

$$\|A|C_p\| = \|I|C_p\| = n^{1/p}.$$

Wir bezeichnen mit $C_p := C_p(l_2, l_2)$. Im endlichdimensionalen Fall ist $C_p^n := C_p(l_2^n, l_2^n)$. Bekanntlich ist C_2 der Hilbertraum der Hilbert–Schmidt–Operatoren auf l_2.

Der Banach–Mazur–Abstand zwischen C_p^n und C_2^n ist bekannt [TJ89, 45.2]:

$$d(C_p^n, C_2^n) = n^{|1/p-1/2|} \qquad \text{für } 1 \leq p \leq \infty.$$

Satz 5.6 *Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt*

$$\boldsymbol{\varrho}_{\pm}\left(C_p^n|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right) \succ n^{|1/p-1/2|}.$$

Beweis: Der folgende Beweis ist aus [PW, 9.2.10].

Mit W_n bezeichnen wir die Walsh–Matrizen der Ordnung $n = 2^m$, ihre Konstruktion ist induktiv:

$$W_1 := (1)$$

und

$$W_{n+1} := \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix}.$$

Offenbar genügt es, den Satz für Zahlen $n = 2^m$ mit $m \in I\!N$ zu beweisen. Es sei zunächst $1 \leq p < 2$ und $1 \leq i, j \leq n$. Mit

$$T_{ij} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(l_2^n)$$

bezeichnen wir die Matrix mit genau einem Eintrag 1 im Feld (i, j). Man rechnet leicht nach, daß für alle $0 \leq s, t \leq 1$ gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) T_{ij} \,\middle|\, C_p^n \right\| = n.$$

Es sei nun $W_n = (\varepsilon_{ij})$ die Walsh–Matrix mit Einträgen aus $\{\pm 1\}$.

Dann ist für $0 \leq s, t \leq 1$ die Matrix

$$F := n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} T_{ij}$$

unitär. Also ist

$$\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} T_{ij} \,\middle|\, C_p^n \right\| \quad = \quad n^{1/2+1/p}.$$

Damit ist

$$\boldsymbol{\varrho}_{\pm}\left(C_p^n|\mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n\right) \geq n^{1/p-1/2}.$$

Für $2 < p \leq \infty$ verfährt man analog. Dabei verwende man als T_{ij} Matrizen mit genau einem Eintrag ε_{ij} aus W_n im Feld (i, j). □

Bemerkung: Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist diese Abschätzung scharf (Satz 5.8). Wir vermuten, daß dies für alle $1 \leq p \leq \infty$ gilt.

Natürlich ist $\mathbf{a}_n(C_\infty, L_\infty) = 1$. Für $p < \infty$ gilt die folgende Aussage.

Theorem 5.7

$$n^{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} \prec \mathbf{a}_n(C_p, L_p) \prec n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}.$$

Beweis: Es sei $n = m^2$ und $F \in DIM_{m^2}(L_p)$. Man rechnet leicht die folgende Relation nach

$$\boldsymbol{\varrho}_\pm \left(C_p^m | \mathcal{R}_m \otimes^f \mathcal{R}_m, \mathcal{R}_m \otimes^f \mathcal{R}_m \right) \leq d(C_p^m, F)\, \boldsymbol{\varrho}_\pm \left(F | \mathcal{R}_m \otimes^f \mathcal{R}_m, \mathcal{R}_m \otimes^f \mathcal{R}_m \right).$$

Also ist wegen Satz 5.4

$$\inf_{F \in DIM_{m^2}(L_p)} d(C_p^m, F) \succ m^{|1/p-1/2|}. \tag{5.5}$$

Die angegebene obere Abschätzung

$$\mathbf{a}_n(C_p, L_p) \leq \mathbf{a}_n(C_p, l_2) \asymp \boldsymbol{\kappa}_n(C_p) \prec n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$$

erhält man wie folgt: Man wende Satz 5.11 an und benutze dabei die folgenden Interpolationsformeln für $1 < p < 2 < q < \infty$ ([Pie87, 2.3.14], [PW, 9.2.2])

$$C_p = [C_1, C_2]_{\theta_p} \qquad \text{und} \qquad C_q = [C_2, C_\infty]_{\theta_q}$$

für $1/p = 1 - \theta_p + \theta_p/2$ und $1/q = (1-\theta_q)/2$. $\square$

Bemerkung: Die Ungleichung (5.5) im Beweis ist scharf. Wegen des Dvoretzky–Theorems und $d(C_p^m, C_2^m) = m^{|1/p-1/2|}$ ist

$$\inf_{F \in DIM_{m^2}(L_p)} d(C_p^m, F) \asymp m^{|1/p-1/2|}.$$

Es gilt Abschätzung (1.2)

$$\boldsymbol{\varrho}_\pm \left(X | \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n \right) \leq n.$$

Wir zeigen eine schärfere obere Abschätzung

Satz 5.8

$$\boldsymbol{\varrho}_\pm \left(X | \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n, \mathcal{R}_n \otimes^f \mathcal{R}_n \right) \leq (2n)^{1/2}.$$

Beweis: Die Idee zu diesem Beweis ist aus [PW, 9.2.11].

Für $1 \leq i, j \leq n$ seien Zahlen $\varepsilon_{ij} \in \{\pm 1\}$ gewählt. Mit T bezeichnen wir die Matrix mit diesen n^2 Einträgen. Dann ist $\|T : l_1^n \to l_\infty^n\| = 1$. Es gilt [Pie78, 6.5.3]

$$\pi_1(I : l_1^n \to l_2^n) \leq 2^{1/2}$$

und [TJ89, 9.5]

$$\nu(T : l_1^n \to l_\infty^n) = \pi_1(T : l_1^n \to l_\infty^n).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \nu(T : l_1^n \to l_\infty^n) &= \pi_1(T : l_1^n \to l_\infty^n) \\ &\leq \pi_1(I : l_1^n \to l_2^n) \|I : l_2^n \to l_1^n\| \|T : l_1^n \to l_\infty^n\| \leq (2n)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, daß T wie folgt dargestellt werden kann:

Es gibt eine Zahl N, so daß für alle $1 \le i, j \le n$ gilt

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varepsilon_i^{(k)} \delta_j^{(k)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k| \le (2n)^{1/2} \tag{5.6}$$

mit reellen Zahlen λ_k und Vorzeichen $\varepsilon_i^{(k)}$, $\delta_j^{(k)} \in \{\pm 1\}$ für alle $1 \le k \le N$.

Dann gilt für beliebige n^2 Elemente x_{ij} aus X:

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i(s) r_j(t) \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^2 dsdt \right)^{1/2} \\ = &\left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i(s) \varepsilon_i^{(k)} r_j(t) \delta_j^{(k)} x_{ij} \right) \right\|^2 dsdt \right)^{1/2} \\ \le &\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k| \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i(s) \varepsilon_i^{(k)} r_j(t) \delta_j^{(k)} x_{ij} \right\|^2 dsdt \right)^{1/2} \\ = &\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k| \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i(s) r_j(t) x_{ij} \right\|^2 dsdt \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes genügt demnach das Konstruieren der obigen Darstellung für T.

Da T endlichen Rang hat, existiert wegen $\nu(T) \le (2n)^{1/2}$ eine natürliche Zahl M und es existieren für alle $1 \le k \le M$ reelle Zahlen η_k und $x_k, y_k \in B_{l_\infty^n}$, $k = 1, 2, \dots M$, so daß T die folgende Darstellung besitzt

$$T = \sum_{k=1}^{M} \eta_k \, x_k \otimes y_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{M} |\eta_k| \le (2n)^{1/2}.$$

Im folgenden wenden wir den Satz von Krein–Milman (siehe z. B. [Bea85, S. 124]) an:

Satz 5.9 *Eine konvexe, kompakte Teilmenge C eines Banachraumes X ist die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.*

Als Extremalpunkte von $B_{l_\infty^n}$ findet man im reellen Fall leicht genau die 2^n Punkte

$$k_l := (\delta_{l1}, \delta_{l2}, \dots, \delta_{ln}) \qquad 1 \le l \le 2^n ,$$

deren Koordinaten δ_{li} aus $\{\pm 1\}$ sind.

Damit können wir T auch schreiben als

$$T = \sum_{k=1}^{M} \eta_k \left(\sum_{l=1}^{2^n} \alpha_l^{(k)} k_l \right) \otimes \left(\sum_{m=1}^{2^n} \beta_m^{(k)} k_m \right)$$

mit $\alpha_l^{(k)}$, $\beta_m^{(k)} \geq 0$ und

$$\sum_{l=1}^{2^n} \alpha_l^{(k)} = \|x_k\| \leq 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{m=1}^{2^n} \beta_m^{(k)} = \|y_k\| \leq 1.$$

Also ist

$$T = \sum_{l=1}^{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{M} \eta_k \alpha_l^{(k)} \beta_m^{(k)} \right) k_l \otimes k_m$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \left| \sum_{k=1}^{M} \eta_k \alpha_l^{(k)} \beta_m^{(k)} \right| &\leq \sum_{l=1}^{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \sum_{k=1}^{M} |\eta_k| \alpha_l^{(k)} \beta_m^{(k)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{M} |\eta_k| \leq (2n)^{1/2}. \end{aligned}$$

Für $k_l = (\delta_{l1}, \delta_{l2}, \ldots, \delta_{ln})$ und die Einheitsvektoren $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $I\!R^n$ ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle &= \sum_{l=1}^{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{M} \eta_k \alpha_l^{(k)} \beta_m^{(k)} \right) \langle e_j, k_l \rangle \langle e_i, k_m \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{M} \eta_k \alpha_l^{(k)} \beta_m^{(k)} \right) \delta_{lj} \delta_{mi}\,, \end{aligned}$$

womit eine Darstellung entsprechend (5.6) gefunden wurde mit $N = 2^{2n}$ und

$$\lambda_k = \sum_{k=1}^{M} \eta_k \alpha_l^{(k)} \beta_m^{(k)}.$$

□

Lorentz–Räume

Wir betrachten hier nur Lorentz–Folgenräume.

Zu einer gegen Null konvergierenden Zahlenfolge (α_n) bezeichnet (α_n^*) die nichtwachsende Umordnung von $(|\alpha_n|)$. Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq q < \infty$. Wir führen die folgende Bezeichnung ein

$$\|(\alpha_j)|l_{p,q}\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(j^{1/p-1/q} \alpha_j^* \right)^q \right)^{1/q} .$$

Die Menge aller Folgen, für die dieser Ausdruck endlich ist, bezeichnet man als *Lorentz–Raum* $l_{p,q}$. Dann ist $\| \cdot | l_{p,q} \|$ eine Quasinorm auf $l_{p,q}$ (statt der Dreiecksungleichung gilt nur $\|x+y\| \leq C\,(\|x\| + \|y\|)$ für eine universelle Konstante C). Diese Quasinorm ist aber für $1 < p < \infty$ äquivalent zu einer Norm, unter der $l_{p,q}$ Banachraum wird (vgl. [Cre81, S. 148]). Es gilt $l_{p,p} = l_p$. Wir bemerken, daß l_q zu einem Teilraum von $l_{p,q}$ isomorph ist [ACL73], [LT79, I, 4.e.3].

Lorentz–Räume erhält man auch durch reelle Interpolation der l_p–Räume.

Satz 5.10 [Tri95, 1.18.3.]
Es seien $0 < \theta < 1$ und $1 \leq q < \infty$, $1 \leq r, s \leq \infty$. Weiter sei p bestimmt durch

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{s}.$$

Dann gilt

$$l_{p,q} = (l_r, l_s)_{\theta,q}\,.$$

Aus [PW] sind gute Eigenschaften von $\boldsymbol{\kappa}_n$ bezüglich reeller und komplexer Interpolation bekannt.

Satz 5.11 [PW, 2.3.18, Bemerkung zu 2.3.9]
Es sei (X, Y) ein Interpolationspaar. Dann gilt

(i)

$$\boldsymbol{\kappa}_n\left([X,Y]_\theta\right) \leq \boldsymbol{\kappa}_n(X)^{1-\theta} \boldsymbol{\kappa}_n(Y)^\theta\,,$$

(ii)

$$\boldsymbol{\kappa}_n\left((X,Y)_{\theta,2}\right) \leq \boldsymbol{\kappa}_n(X)^{1-\theta} \boldsymbol{\kappa}_n(Y)^\theta\,.$$

Das folgende Resultat gibt einen Hinweis auf die lokale Struktur von $l_{p,q}$.

Satz 5.12 [Cre81, Theorem 3.8.]
Es gilt für $1 < p < \infty$

$$p(l_{p,2}) = \min\{p, 2\}\,, \qquad q(l_{p,2}) = \max\{p, 2\}\,.$$

Wegen des Maurey–Pisier–Theorems (Satz 1.3) sind also die l_p^n gleichmäßig in $l_{p,2}$ enthalten. Eine einfache Folgerung ist

Theorem 5.13 $1 < p < \infty$. *Dann gilt*

$$\mathbf{a}_n(l_{p,2}, l_2) \;\asymp\; n^{|1/2-1/p|}.$$

Beweis: Wegen Satz 5.12 ist

$$n^{|1/2-1/p|} \asymp \mathbf{a}_n(l_p, l_2) \leq \mathbf{a}_n(l_{p,2}, l_2) \qquad \text{für } 1 < p < \infty.$$

Für die obere Abschätzung sei zunächst $2 < p < \infty$. Dann ist

$$l_{p,2} = (l_2, l_\infty)_{\theta,2} \,, \qquad \theta = 1 - \frac{2}{p}\,.$$

Also ist wegen der Interpolationseigenschaft der Kwapienidealnorm

$$\mathbf{a}_n\left(l_{p,2}, l_2\right) \asymp \boldsymbol{\kappa}_n(l_{p,2}) \prec \left(\boldsymbol{\kappa}_n\left(l_\infty\right)\right)^{1-\frac{2}{p}} \asymp n^{1/2-1/p}.$$

Der Fall $1 < p < 2$ kann völlig analog behandelt werden. □

Bemerkungen:

1. Man kann im Satz 5.11 $\boldsymbol{\kappa}_n$ nicht durch den allgemeineren Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand ersetzen:

   Es sei $2 < r < s < \infty$. Weiter sei $\theta \in (0, 1)$ so gewählt, daß gilt $l_r = [l_s, l_2]_\theta$.

   Dann existiert ein $\alpha > 0$, so daß gilt (Satz 2.17)

   $$\mathbf{a}_n([l_s, l_2]_\theta, l_s) = \mathbf{a}_n(l_r, l_s) \succ n^\alpha\,.$$

   Andererseits ist $\mathbf{a}_n(l_2, l_s)^\theta = \mathbf{a}_n(l_s, l_s)^{1-\theta} = 1$ für alle $0 < \theta < 1$.

2. Die Aussage (ii) des Satzes 5.11 ist nicht richtig für $(X, Y)_{\theta,q}$ mit $q \neq 2$. Dazu betrachte man für $2 < p < \infty$ und festes $q \neq 2$ Lorentz–Räume

   $$l_{p,q} = (l_2, l_\infty)_{\theta,q}\,.$$

   Da l_q Teilraum von $l_{p,q}$ ist, gilt

   $$n^{|1/2-1/q|} \asymp \boldsymbol{\kappa}_n(l_q) \prec \boldsymbol{\kappa}_n(l_{p,q})\,.$$

   Das wäre im Widerspruch zu der dann geltenden Relation

   $$\boldsymbol{\kappa}_n(l_{p,q}) \prec \boldsymbol{\kappa}_n(l_\infty)^{1-\frac{2}{p}}\,,$$

   falls $p - 2$ klein ist.

Räume 2–summierender Operatoren

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Theorems.

Theorem 5.14 $1 \leq p, q \leq \infty$. *Dann gilt*

$$\mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_p, l_q), l_2\right) \asymp \begin{cases} n^{1/p-1/2} & 1 \leq p \leq q \leq 2 \\ n^{1/q-1/2} & 1 \leq q \leq p \leq 2 \\ n^{1/2} & \textit{sonst} \end{cases}.$$

Bevor wir das Theorem beweisen, zitieren wir zwei Sätze. Ein Banachraum heißt *B–konvex*, falls er die l_1^n nicht gleichmäßig enthält. Es gilt der folgende

Satz 5.15 [Lin80]
Falls $\Pi_2(X,Y)$ *B–konvex ist, so haben* X *und* Y *jeden Cotyp* $q > 2$.

Satz 5.16 [Tri95, 1.18.1], [Pis90]
Es seien $1 < p, q < 2$. *Wir wählen* p_0 *und* q_0 *so, daß für ein* $0 < \theta < 1$ *gilt*

$$l_p = (l_{p_0}, l_2)_\theta\,, \qquad\qquad l_q = (l_{q_0}, l_2)_\theta.$$

Dann gilt: $\Pi_2(l_p, l_q)$ *ist isomorph zu* $[\Pi_2(l_{p_0}, l_{q_0}), \Pi_2(l_2, l_2)]_\theta$.

Beweis des Theorems: Für $p > 2$ oder $q > 2$ sind wegen Satz 5.15 die l_1^n gleichmäßig in $\Pi_2(l_p, l_q)$ enthalten. Damit ist in diesem Fall nach Bild 2.16

$$\mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_p, l_q), l_2\right) \succ \mathbf{a}_n(l_1, l_2) \asymp n^{1/2}.$$

Bekannt ist weiterhin, daß das Operatorenideal $\Pi_2(X,Y)$ isomorphe Bilder von X' und Y enthält. Damit ist das Theorem richtig für $p = 1$ oder $q = 1$.

Es bleibt der Fall $1 < p, q \leq 2$ zu untersuchen. Für $p = q = 2$ ist nichts zu zeigen, denn $\Pi_2(l_2, l_2)$ ist Hilbertraum.

Wir betrachten zunächst $1 < q \leq p \leq 2$. Dann ist wegen $l_q \subset \Pi_2(l_p, l_q)$

$$n^{1/q-1/2} \asymp \mathbf{a}_n(l_q, l_2) \prec \mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_p, l_q), l_2\right)\,.$$

Andererseits errechnet man für $q_0 = 1$ in Satz 5.16

$$\theta = 2 - \frac{2}{q}.$$

Also ist wegen der Sätze 5.16 und 5.11

$$\mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_p, l_q), l_2\right) \prec \mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_{p_0}, l_1), l_2\right)^{1-\theta} \asymp \left(n^{1/2}\right)^{1-\theta} = n^{1/q-1/2}\,.$$

Da die Kwapien–Idealnorm symmetrisch ist und gilt

$$\Pi_2(l_p, l_q)' = \Pi_2(l_q, l_p)$$

(einen Beweis findet man z. B. in [Sch86, S. 86]), erhalten wir für $1 < p \leq q \leq 2$ entsprechend

$$\mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_p, l_q), l_2\right) \asymp \mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_q, l_p), l_2\right) \asymp n^{1/p-1/2}\,.$$

□

6 Die Öffnungstopologie

Eine weitere Struktur auf der Klasse aller Banachräume basiert auf den Öffnungen. Dieser Begriff geht auf [KKM48] zurück. Die mit dem Öffnungsbegriff definierte Halbmetrik d_Λ auf der Klasse aller Banachräume wurde von [Kad75] eingeführt. M. I. Ostrovskii schließlich definierte und untersuchte offene Teilklassen in L [Ost94].

Wir werden uns hier aus formalen Gründen auf die separablen Banachräume beschränken. Sie können als Teilräume des $C[0,1]$ aufgefaßt werden [Bea85, S. 127], deshalb können wir von der Menge L_s der separablen Banachräume in L sprechen. Wegen Satz 1.11 ist diese Einschränkung in $[\mathsf{L}]$ ohne Auswirkungen.

Der Unterschied zu den bisher betrachteten Topologien wird durch Beispiele gezeigt. Wir werden zwei Teilmengen $\mathsf{L}_1 \subset \mathsf{L}_s$ und $\mathsf{L}_2 \subset \mathsf{L}_s$ finden: L_1 ist $d_\Lambda-$offen, aber in $[\mathsf{L}]$ nicht $\mathsf{TOP}-$offen. L_2 ist $\mathsf{TOP}-$offen in $[\mathsf{L}]$, aber nicht $d_\Lambda-$offen.

Es sei X ein separabler Banachraum und $G(X)$ die Menge seiner nichtleeren, abgeschlossenen Teilräume. A und B seien beliebige Teilmengen aus X. Wir setzen

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{\|a-b\| : \ a \in A,\ b \in B\}.$$

Der asymmetrische Hausdorff–Abstand der Einheitssphären von $Y, Z \in G(X)$ ist definiert als

$$\Omega_0(Y,Z) := \sup_{y \in S(Y)} \operatorname{dist}(y, S(Z))\,.$$

Wir bezeichnen

$$\Omega(Y,Z) := \max\{\Omega_0(Y,Z),\ \Omega_0(Z,Y)\}$$

als *sphärische Öffnung zwischen Y und Z*. Dann ist Ω eine Metrik auf $G(X)$.

Man kann diesen Begriff auf die Menge aller separablen Banachräume ausdehnen. Dazu bezeichnet man

$$d_\Omega(Y,Z) := \inf_{X;U,V} \Omega(UY, VZ),$$

dabei wird das Infimum gebildet über alle separablen Banachräume X, die isometrische Bilder von Y und Z enthalten, und alle isometrischen Einbettungen $U : Y \hookrightarrow X$ und $V : Z \hookrightarrow X$.

Bemerkung: Die Untersuchungen verlaufen analog, wenn in dieser Definition $X = C[0,1]$ festgehalten wird.

Neben der sphärischen Öffnung werden weitere Öffnungen betrachtet:

$$\Theta_0(Y,Z) := \sup_{y \in S(Y)} \operatorname{dist}(y, Z)$$

und

$$\Lambda_0(Y,Z) := \sup_{y \in S(Y)} \operatorname{dist}(y, B(Z)).$$

Man bezeichnet mit

$$\Theta(Y,Z) := \max\{\Theta_0(Y,Z),\, \Theta_0(Z,Y)\}$$

die *geometrische Öffnung zwischen* Y *und* Z und mit

$$\Lambda(Y,Z) := \max\{\Lambda_0(Y,Z),\, \Lambda_0(Z,Y)\}$$

die *Kugelöffnung zwischen* Y *und* Z.

Bemerkung: Die geometrische Öffnung wurde erstmals untersucht in [KKM48]. Einen umfassenden Überblick findet man in [Ost94], weitere Resultate sind u. a. in [Ost87] und [Ost96]. So wird in [Ost94] gezeigt, daß

$$d_{ge}(Y,Z) := \log(1 + \Theta(Y,Z))$$

eine Metrik auf $G(X)$ ist. Λ ist eine Metrik. Diese Metriken erzeugen diesselbe Topologie auf $G(X)$, denn es gilt

$$\Theta(Y,Z) \le \Lambda(Y,Z) \le \Omega(Y,Z) \le 2\Theta(Y,Z).$$

$G(X)$ ist vollständig bezüglich dieser Metriken (vgl. [Ost94]).

Analog zu d_Ω definiert man d_Λ auf L_s. Dann ist d_Λ eine vollständige Halbmetrik auf L_s, es gibt nichtisomorphe Banachräume Y und Z mit $d_\Lambda(Y,Z) = 0$ ([Ost87], die Beweise bleiben richtig, wenn man nur separable Banachräume zuläßt). Die entsprechende Identifizierung von Banachräumen ist feiner als unsere Äquivalenzrelation.

Theorem 6.1 *Falls* $d_\Lambda(X,Y) = 0$ *gilt, so ist* $\mathsf{s}_n(X,Y) = 1$. *Aus* $X \sim Y$ *folgt im allgemeinen nicht* $d_\Lambda(X,Y) = 0$.

Beweis: Die Idee für den ersten Teil ist von A. Hinrichs (unpubliziert).

Wegen $d_\Lambda(X,Y) = 0$ existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Banachraum Z, der X und Y isometrisch enthält und in $G(Z)$ gilt $\Lambda(X,Y) < \varepsilon$. Also existiert für jedes $x \in S(X)$ ein $y \in B(Y)$ mit $\|x - y|Z\| < \varepsilon$.

Zum Beweis verwenden wir das bekannte Lemma von H. Auerbach.

Lemma 6.2 [DJT95, 6.26] *E sei ein $n-$dimensionaler Banachraum. Dann existieren* $x_1, \dots x_n \in S(E)$ *und* $x'_1, \dots x'_n \in S(E')$, *so daß gilt*

$$\langle x_i, x'_i\rangle = 1 \qquad \textit{und} \qquad \langle x_i, x'_j\rangle = 0 \textit{ für } i \ne j.$$

Das System $(x_i, x'_i)_{i=1}^n$ nennt man Auerbach–Basis für E.

Es sei $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ und (x_i, x'_i) eine Auerbach–Basis für E_n. Dann gilt für alle $x \in E_n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x'_i\rangle x_i\,.$$

Nach Voraussetzung existieren $y_i \in B(Y)$ mit

$$\|x_i - y_i\| < \varepsilon, \qquad i = 1, \dots n .$$

Wir bezeichnen mit

$$F_n := \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y .$$

$T : E_n \to F_n$ sei die lineare Abbildung mit $Tx_i = y_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Tx - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle (y_i - x_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x|E_n\| \|x_i'|E_n'\| \|y_i - x_i\| \\ &< \varepsilon n \|x|E_n\| . \end{aligned}$$

Wegen

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx - x\| \leq (1 + \varepsilon n)\, \|x\|$$

ist

$$\|T\| \leq 1 + \varepsilon n .$$

Weiter gilt wegen

$$\|x\| \leq \|x - Tx\| + \|Tx\| \leq \varepsilon n \|x\| + \|Tx\|$$

die Ungleichung

$$\|x\| \leq \frac{\|Tx\|}{1 - \varepsilon n} ,$$

d. h. T ist Isomorphismus für $\varepsilon < \frac{1}{n}$ und es ist

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon n}.$$

Also ist

$$d(E_n, F_n) \leq \frac{1 + \varepsilon n}{1 - \varepsilon n} .$$

Zu gegebenen n kann $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ beliebig gewählt werden, demnach ist $\mathbf{a}_n(X, Y) = 1$. Ebenso zeigt man $\mathbf{a}_n(Y, X) = 1$. Für den zweiten Teil zeigen wir nun, daß es isomorphe Banachräume mit positivem Abstand gibt. Das folgende Beispiel zeigt mehr:

Satz 6.3 (vgl. [KO]) $1 < p < 2$. *Die Folge von Banachräumen $X_n := l_p^n \oplus l_2$ besitzt keine bezüglich d_Λ konvergente Teilfolge.*

Beweis: Es sei $0 < \varepsilon < 1$, so daß gilt

$$(2^{1/p} - 2\varepsilon)^2 > 2 + 4\varepsilon.$$

Wir zeigen, daß zu $n \in I\!N$ ein $m > n$ existiert mit $d_\Lambda(X_n, X_m) > \varepsilon$. Dazu sei m so groß gewählt, daß es in $B(l_p^n)$ keine m-elementige ε-Distanzmenge gibt. Entsprechend [CS90, 1.1.8] genügt es,

$$m > 1 + \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^n$$

auszuwählen.

Wir nehmen indirekt an, es gäbe einen X_m und X_n enthaltenden Banachraum Z und es gelte

$$\Lambda(X_m, X_n) < \varepsilon.$$

Für $1 \leq k \leq m$ sei $f_k \in B(X_n)$ so gewählt, daß $\|f_k - e_k\| < \varepsilon$ gilt, wobei die e_k die zur Einheitsbasis von l_p^m gehörenden Vektoren von X_m sind. Es sei $f_k = (u_k, v_k)$ mit $u_k \in l_p^n$ und $v_k \in l_2$. Nach Voraussetzung an m existieren $k, l \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\|u_k - u_l\| < \varepsilon$. Es gilt

$$\|f_k \pm f_l\| > \|e_k \pm e_l\| - 2\varepsilon = 2^{1/p} - 2\varepsilon.$$

Also ist

$$\|u_k - u_l\|^2 + \|u_k + u_l\|^2 + \|v_k - v_l\|^2 + \|v_k + v_l\|^2 \geq 2\left(2^{1/p} - 2\varepsilon\right)^2.$$

Andererseits gilt für die v_i die Parallelogrammgleichung

$$\|v_k - v_l\|^2 + \|v_k + v_l\|^2 = 2\|v_k\|^2 + 2\|v_l\|^2$$

und

$$\|u_k\|^2 + \|v_k\|^2 \leq 1, \qquad \|u_l\|^2 + \|v_l\|^2 \leq 1.$$

Also ist

$$2\left(2^{1/p} - 2\varepsilon\right)^2 \leq \|u_k - u_l\|^2 + \|u_k + u_l\|^2 + 4 - 2\|u_k\|^2 - 2\|u_l\|^2 <$$

$$< \varepsilon^2 + (2\|u_k\| + \varepsilon)^2 + 4 - 2\|u_k\|^2 - 2(\|u_k\| - \varepsilon)^2 = 4 + 8\|u_k\|\varepsilon.$$

Demnach gilt

$$\left(2^{1/p} - 2\varepsilon\right)^2 < 2 + 4\varepsilon\,,$$

im Widerspruch zur Wahl von ε. □

Mit $[\mathsf{L}_s|d_\Lambda]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklassen in L_s, die bei Identifizierung der Banachräume mit $d_\Lambda(X, Y) = 0$ entstehen. Die Topologie auf $[\mathsf{L}_s|d_\Lambda]$ bezüglich d_Λ nennen wir *Öffnungstopologie.*

Theorem 6.4 *Wir bezeichnen mit*

$$\mathsf{L}_1 := \{X \in \mathsf{L}_s : \, d_\Lambda(X, l_1) < 1/2\} \qquad \textit{und} \qquad \mathsf{L}_2 := \{X \in \mathsf{L}_s : \, X \not\sim l_1\}$$

zwei Teilmengen von Banachräumen in L_s*. Dann ist* L_1 $d_\Lambda-$*offen, aber in* $[\mathsf{L}]$ *nicht* $\mathsf{TOP}-$*offen.* L_2 *ist in* $[\mathsf{L}]$ *natürlich* $\mathsf{TOP}-$*offen, aber nicht* $d_\Lambda-$*offen.*

Bevor wir zum Beweis des Theorems kommen, stellen wir die folgende Konstruktion aus [Ost94] vor, die auf A. Douady [Dou66] zurückgeht.

X sei ein Banachraum und $Y \in G(X)$. Q sei die Quotientenabbildung

$$Q : \; X \longrightarrow X/Y.$$

Im Banachraum $X \oplus_1 X/Y$ betrachten wir folgende abgeschlossene Teilräume:

$$G_0 := Y \oplus_1 X/Y \qquad \text{und} \qquad G_\varepsilon := \{(\varepsilon x,\, Qx) : x \in X\}$$

für $0 < \varepsilon < 1$.

Lemma 6.5 *G_ε und X sind isomorph. Es gilt*

$$d(G_\varepsilon, X) \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \textit{und} \qquad \Theta(G_0, G_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Beweis: Man betrachtet die Bijektion $Tx := (\varepsilon x, Qx)$ in $\boldsymbol{\mathcal{L}}(X, G_\varepsilon)$. Wegen $\|Q\| = 1$ ist dann

$$\|T\| \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir wählen $u = (\varepsilon x, Qx) \in G_\varepsilon$, so daß $u \neq 0$ gilt. Dann ist

$$\|u\| = \varepsilon\|x\| + \|Qx\|.$$

Nun sei $\delta > 0$. Es existiert ein $y_\delta \in N(Q) = Y$ mit

$$\|x - y_\delta\| < \|Qx\| + \delta.$$

Wir bezeichnen $v_\delta(u) := (\varepsilon y_\delta, Qx)$. Dann ist $v_\delta(u) \in G_0$. Wegen

$$\frac{\|u - v_\delta(u)\|}{\|u\|} \leq \frac{\varepsilon\|x - y_\delta\|}{\varepsilon\|x\| + \|Qx\|} \leq \frac{\varepsilon(\|Qx\| + \delta)}{\varepsilon\|x\| + \|Qx\|} < \varepsilon$$

für hinreichend kleines $\delta > 0$ ist

$$\Theta_0(G_\varepsilon, G_0) \leq \varepsilon.$$

Ähnlich beweist man $\Theta_0(G_0, G_\varepsilon) \leq \varepsilon$. □

Satz 6.6 *Für $0 \leq \varepsilon < 1$ existieren Banachräume G_ε, so daß gilt*

$$\Theta(G_0, G_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

und für $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathbf{s}_n(G_0, G_\varepsilon) \asymp n^{1/2}.$$

Beweis: Jeder separable Banachraum ist isomorph zu einem Quotienten von l_1 ([LT79, I, S. 108]). Also existiert ein $Y \in G(l_1)$, so daß l_1/Y isomorph zu c_0 ist.

Wir führen die obige Konstruktion in $l_1 \oplus_1 c_0$ aus. Dann ist

$$G_0 = Y \oplus_1 c_0 \qquad \text{und} \qquad G_\varepsilon \cong l_1.$$

Damit ist aber für $0 < \varepsilon < 1$ (vgl. Bild 2.16)

$$\mathbf{s}_n(G_0, G_\varepsilon) \asymp \mathbf{s}_n(l_\infty, l_1) \asymp n^{1/2}.$$

□

Beweis des Theorems 6.4: L_1 ist $d_\Lambda-$offen und wegen [Ost87, Prop. 10] sind alle Banachräume in L_1 isomorph zu l_1. Wegen Theorem 4.10 (2) ist $[l_1]$ nicht $\mathsf{ULT}-$isoliert, d. h. L_1 ist in $[\mathsf{L}]$ nicht $\mathsf{TOP}-$offen.

L_2 ist in $[\mathsf{L}]$ als Komplement einer einpunktigen Menge natürlich $\mathsf{TOP}-$offen. Wir wählen G_0 und G_ε, $\varepsilon > 0$ wie im Beweis zu Satz 6.6. Dann ist $G_0 \in \mathsf{L}_2$, andererseits findet man zu jedem $\delta > 0$ ein $G_\varepsilon \notin \mathsf{L}_2$ mit $d_\Lambda(G_\varepsilon, G_0) < \delta$. Also ist L_2 nicht $d_\Lambda-$offen. $\square$

Damit ist gezeigt, daß die Öffnungstopologie mit unseren betrachteten Topologien nicht vergleichbar ist.

Literaturverzeichnis

[ACL73] Z. Altshuler, P. G. Casazza und B. L. Lin. *On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces.* Israel J. Math. **15** (1973), S. 140–155.

[Bea85] B. Beauzamy. Introduction to Banach spaces and their geometry. North–Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 2. Auflage, 1985.

[BL76] J. Bergh und J. Löfström. Interpolation spaces. Springer, Berlin–Heidelberg, 1976.

[Bol90] B. Bollobás. Linear analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[CS90] B. Carl und I. Stephani. Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Cre81] J. Creekmore. *Type and cotype in Lorentz $L_{p,q}$ spaces.* Indag. Math. **43** (1981), S. 145–152.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow und D. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Dou66] A. Douady. *Le problème des modules pour les sous–espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.* Ann. Inst. Fourier **16** (1966), S. 1–95.

[Dvo61] A. Dvoretzky. *Some results on convex bodies and Banach spaces.* Proc. Symp. on Linear Spaces, 1961, S. 123–160.

[Fig72] T. Figiel. *An example of infinite dimensional reflexive Banach space non–isomorphic to its Cartesian square.* Studia Math. **42** (1972), S. 295–306.

[Fig73] T. Figiel. *Factorization of compact operators and applications to the approximation problem.* Studia Math. **45** (1973), S. 191–210.

[For95] G. M. Force. *Constructions of $\mathcal{L}_p$–spaces for $p \in (1,\infty)\backslash\{2\}$.* Dissertation, Oklahoma State University, 1995.

[GJ60] L. Gillman und M. Jerison. Rings of continuous functions. Nostrand, Princeton–New York–London–Toronto, 1960.

[HK] A. Hinrichs und T. Kaufhold. *Hausdorff–Banach–Mazur distance between l_p spaces.* In Vorbereitung.

[Jes33] B. Jessen. *Om Uligheder imellem Potensmiddelværdier.* Mat. Tidsskrift, **B** (1933), S. 1–19.

[Joh48] F. John. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions.* Courant Anniversary Volume, S. 187–204, Interscience, New York, 1948.

[Joi66] J. I. Joichi. *Normed linear spaces equivalent to inner–product spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), S. 423–426.

[Kad75] M. I. Kadets. *Note on the gap between subspaces.* Funct. Anal. Appl. **9** (1975), S. 156–157.

[KKM48] M. G. Krein, M. A. Krasnoselskii und D. P. Milman. *On the defect numbers of linear operators in a Banach space and on some geometric questions.* Sbornik Trudov Inst. Matem. AN Ukrainian SSR, **11** (1948), S. 97–112 (russisch).

[KO] N. J. Kalton und M. I. Ostrovskii. *The distance between Banach spaces induced by the opening between subspaces of a Banach space.* Preprint.

[KP62] M. I. Kadets und A. Pelczynski. *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p.* Studia Math. **21** (1962), S. 161–176.

[Kri76] J. L. Krivine. *Sous–espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés.* Ann. Math. **104** (1976), S. 1–29.

[Lac74] H. E. Lacey. The isometric theory of classical Banach spaces. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.

[Lin80] P.–K. Lin. *B–Convexity of the space of $2-$summing operators.* Israel J. Math. **37** (1980), S. 139–150.

[LP68] J. Lindenstrauss und A. Pelczynski. *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p-$spaces and their applications.* Studia Math. **29** (1968), S. 275–326.

[LT77] J. Lindenstrauss und L. Tzafriri. Classical Banach spaces I and II, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977 und 1979.

[Mas88] V. Mascioni. *On weak cotype and weak type in Banach spaces.* Note Mat. **8** (1988), S. 67–110.

[McC67] A. C. McCarthy. c_p. Israel J. Math. **5** (1967), S. 249–271.

[MP76] B. Maurey und G. Pisier. *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach.* Studia Math. **58** (1976), S. 45–90.

[MS86] V. D. Milman und G. Schechtman. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces. Springer, Berlin–Heidelberg, 1986.

[Ost87] M. I. Ostrovskii. *On properties of the opening and related closeness characterizations of Banach spaces.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) **136** (1987), S. 109–119.

[Ost94] M. I. Ostrovskii. *Topologies on the set of all subspaces of a Banach space and related questions of Banach space geometry.* Quaestiones Math. **17** (1994), S. 259–319.

[Ost96] M. I. Ostrovskii. *Classes of Banach spaces stable and unstable with respect to the opening.* Quaestiones Math. **19** (1996), S. 191–210.

[Pie] A. Pietsch. *Topologies on the class of all Banach spaces.* Preprint.

[Pie78] A. Pietsch. Operator ideals. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[Pie87] A. Pietsch. Eigenvalues and $s-$numbers. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Pie90] A. Pietsch. *Sequences of ideal norms.* Note di Mat. (Lecce) **10** (1990), S. 411–441.

[Pie91] A. Pietsch. *Eigenvalue distribution and geometry of Banach spaces.* Math. Nachr. **150** (1991), S. 41–81.

[PW] A. Pietsch und J. Wenzel. Orthonormal systems and Banach space geometry. In Vorbereitung.

[Pis78] G. Pisier. *Some results on Banach spaces without local unconditional structure.* Compositio Math. **37** (1978), S. 3–19.

[Pis89] G. Pisier. The volume of convex bodies and Banach space geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Pis90] G. Pisier. *A remark on* $\Pi_2(l_p, l_p)$. Math. Nachr. **148** (1990), S. 243–245.

[Rin75] W. Rinow. Lehrbuch der Topologie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[Ros73] H. P. Rosenthal. *On subspaces of* L_p. *Ann. Math.* **97** (1973), S. 344–373.

[Sch64] H. Schubert. Topologie. Teubner, Stuttgart, 1964.

[Sch86] I. Schütt. *Banachräume absolut $p-$summierender Operatoren.* Dissertation, Universität Kiel, 1986.

[TJ89] N. Tomczak–Jaegermann. Banach–Mazur distances and finite–dimensional operator ideals. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.

[Tri95] H. Triebel. Interpolation theory, function spaces, differential operators. J. Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Jena, 1. Oktober 1997

Lebenslauf

Name	Thomas Kaufhold
Geburtstag, -ort	14. Dezember 1969 in Leinefelde
Familienstand	ledig
1976–1986	Polytechnische Oberschule Dingelstädt
1986–1988	Erweiterte Oberschule Leinefelde
1988	Abitur
1988–1989	Wehrdienst
1989–1994	Studium der Mathematik an der Friedrich–Schiller–Universität in Jena
seit 1993	Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes
8. August 1994	Mathematik–Diplom
08/1994–12/1994	Praktikum bei der Dicke & Wicharz Managementberatung in Neuss
seit 1995	Arbeit an einer Dissertation am mathematischen Institut der Friedrich–Schiller–Universität in Jena

Jena, 1. Oktober 1997

Thomas Kaufhold

Topologien auf der Klasse aller Banachräume

Thesen

Einführung

Wir bezeichnen mit $\mathrm{DIM}_n(X)$ die Menge der $n-$dimensionalen Teilräume eines Banachraumes X. Der Banach–Mazur–Abstand zweier isomorpher Banachräume X und Y wird definiert durch

$$d(X, Y) := \inf \|T\| \|T^{-1}\| ,$$

wobei das Infimum über alle stetigen linearen Bijektionen T von X nach Y gebildet wird. Für $n-$dimensionale Banachräume E_n und F_n gilt $1 \leq d(E_n, F_n) \leq n$.

Mit L bezeichnen wir die Klasse aller unendlichdimensionalen Banachräume. Für X und Y aus L und $n \in I\!N$ heißt

$$\mathbf{a}_n(X, Y) := \sup_{E_n \in DIM_n(X)} \inf_{F_n \in DIM_n(Y)} d(E_n, F_n)$$

$n-$ter asymmetrischer Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand. Wir nennen

$$\mathbf{s}_n(X, Y) := \max \{\mathbf{a}_n(X, Y), \mathbf{a}_n(Y, X)\}$$

den $n-$ten symmetrischen Hausdorff–Banach–Mazur–Abstand.

Mit anderen Worten, $\mathbf{a}_n(X, Y)$ ist das Infimum aller Zahlen $C \geq 1$, so daß gilt: Zu jedem $E_n \in \mathrm{DIM}_n(X)$ existiert ein $F_n \in \mathrm{DIM}_n(Y)$ mit $d(E_n, F_n) \leq C$.

Zwei Banachräume X und Y aus L heißen äquivalent ($X \sim Y$), wenn die Folge $\mathbf{s}_n(X, Y)$ beschränkt ist. $[X]$ steht für die durch X definierte Äquivalenzklasse in L. Man kann zeigen, daß die Äquivalenzklassen eine Menge bilden (wir nennen sie $[\mathsf{L}]$). Wenn wir von *Topologien auf der Klasse aller Banachräume* sprechen, so meinen wir im folgenden Topologien auf dieser Menge $[\mathsf{L}]$.

Es seien $a = (\alpha_n)$ und $b = (\beta_n)$ zwei Folgen positiver Zahlen. Wir schreiben

$$\alpha_n \prec \beta_n \qquad \text{oder auch} \qquad a \prec b ,$$

falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß $\alpha_n \leq C\beta_n$ gilt für $n = 1, 2, \ldots$. Falls $a \prec b$ und $b \prec a$ gleichzeitig gelten, so schreiben wir $a \asymp b$.

Ergebnisse

1 Jede Äquivalenzklasse enthält einen separablen Banachraum.

2 Falls $X \sim l_2(X)$ gilt, so enthält $[X]$ einen reflexiven Banachraum. Die Klasse $[l_1]$ enthält keinen reflexiven Banachraum.

3 Die Klassen $[l_p]$ sind für $p < \infty$ bis auf Isomorphie bekannt:

$$X \in [l_p] \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \cong X_0 \oplus l_p \quad \text{mit einem Unterraum } X_0 \subseteq L_p.$$

Insbesondere enthält $[l_2]$ genau alle zu einem Hilbertraum isomorphen Banachräume. Außerdem ist

$$[l_\infty] = \{X : X \text{ ist ein Banachraum ohne endlichen Rademacher–Cotyp}\}.$$

Damit gehören zu $[l_\infty]$ so unterschiedliche Räume wie c_0, die Diskalgebra, $\mathcal{L}(l_2)$ und alle Banachräume der Form $X \oplus l_\infty$. Für $p \neq 2$ ist $\mathcal{L}_p$ eine echte Teilmenge von $[l_p]$.

4 Das asymptotische Verhalten der Folgen $\mathbf{a}_n(l_p, l_q)$ ist für alle bis auf einen Fall bekannt:

$1 \le p \le q \le 2:$	$\mathbf{a}_n(l_p, l_q) \asymp n^{1/p-1/q}$
$1 \le q \le p \le 2:$	$\mathbf{a}_n(l_p, l_q) \asymp 1$
$1 \le p \le 2 \le q < \infty:$	$\mathbf{a}_n(l_p, l_q) \asymp n^{1/p-1/2}$
$1 \le q \le 2 \le p \le \infty:$	$\mathbf{a}_n(l_p, l_q) \asymp n^{1/2-1/p}$
$2 \le q \le p \le \infty:$	$\mathbf{a}_n(l_p, l_q) \asymp n^{\frac{q}{2}(1/q-1/p)}$
$1 \le p < \infty:$	$\mathbf{a}_n(l_\infty, l_p) \asymp n^{1/2}$

Ferner gilt für $2 < p < q < \infty$:

$$n^{\frac{(1/2-1/p)(1/p-1/q)}{1/2-1/q}} \prec \mathbf{a}_n(l_p, l_q) \prec n^{\frac{p}{2}\frac{(1/2-1/p)(1/p-1/q)}{1/2-1/q}} (\log n)^\beta$$

für ein $\beta = \beta(p,q) > 0$.

5 Mit $\mathcal{M}$ bezeichnen wir die Menge aller unbeschränkten nichtfallenden Folgen (α_n) mit $\alpha_1 \ge 1$. Für jedes $a \in \mathcal{M}$ definieren wir

$$U_a := \{([X],[Y]) \in [\mathsf{L}] \times [\mathsf{L}] : \mathbf{s}_n(X,Y) \prec a\}.$$

Damit besitzt $[\mathsf{L}]$ eine uniforme Struktur, die zugehörige uniforme Topologie auf $[\mathsf{L}]$ nennen wir Ultra–Topologie (ULT). Auch wenn wir im folgenden Äquivalenzklassen meinen, werden wir (analog zur Maßtheorie) die Schreibweise mit Repräsentanten vorziehen, d. h. wir schreiben X statt $[X]$. Eine Umgebungsbasis von $X \in [\mathsf{L}]$ in der Ultra–Topologie bilden die Mengen

$$U_a(X) := \{Y \in [\mathsf{L}] : \mathbf{s}_n(X,Y) \prec a\}.$$

Offenbar ist diese Topologie auf der Menge der Äquivalenzklassen hausdorffsch. Sie ist nicht diskret (z. B. ist l_2 nicht isoliert), jedoch gibt es keine unendlichen präkompakten Mengen. Weiterhin ist der abzählbare Durchschnitt offener Mengen offen.

Die Frage nach der Vollständigkeit der Ultra–Topologie ist ungelöst.

6 Weitere Topologien erhält man durch Einschränkung des Umgebungsbegriffs. Die polynomiale bzw. logarithmische Topologie (POL, LOG) basiert auf Umgebungen U_a mit

Folgen der Form $a = (n^\alpha)$ bzw. $a = ((1 + \log n)^\alpha)$ mit $\alpha > 0$. POL besitzt keine isolierten Punkte. Einziger bekannter isolierter Punkt in ULT und LOG ist l_∞.

7 Die folgenden Klassen von Banachräumen enthalten keine isolierten Punkte in ULT und sind nirgends dicht: Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Typ 2 bzw. (schwachem) Rademacher–Cotyp 2, schwache Hilberträume, UMD–Räume und $2-$konvexifizierbare bzw. $2-$glättbare Banachräume.

Ähnlich zeigt man, daß in POL die folgenden Klassen nirgends dicht sind: Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Typ 2 bzw. Banachräume mit (schwachem) Rademacher–Cotyp 2, schwache Hilberträume und $2-$konvexifizierbare bzw. $2-$glättbare Banachräume.

8 Für jede Folge $a \in \mathcal{M}$ mit $a \prec (n^\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ gibt es einen Banachraum X, so daß gilt

$$\mathbf{a}_n(X \oplus X, X) \succ a\,.$$

In jeder Umgebung von l_2 findet man Banachräume mit $X \oplus X \not\sim X$.

9 Neben den Abschätzungen zwischen l_p-Räumen konnten für eine Reihe weiterer Banachräume Abschätzungen der Hausdorff–Banach–Mazur–Abstände gefunden werden:

Schattenklassen C_p, $1 \leq p < \infty$:

$$n^{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} \prec \mathbf{a}_n(C_p, L_p) \prec n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}\,.$$

Lorentz–Räume $l_{p,2}$, $1 < p < \infty$:

$$\mathbf{a}_n(l_{p,2}, l_2) \asymp n^{|1/2-1/p|}.$$

Räume $2-$summierender Operatoren $\Pi_2(l_p, l_q)$, $1 \leq p, q \leq \infty$:

$$\mathbf{a}_n\left(\Pi_2(l_p, l_q), l_2\right) \asymp \begin{cases} n^{1/p-1/2} & 1 \leq p \leq q \leq 2 \\ n^{1/q-1/2} & 1 \leq q \leq p \leq 2 \\ n^{1/2} & \text{sonst} \end{cases}.$$

10 Wir vergleichen unsere Topologien mit der von M. I. Kadets auf der Klasse aller Banachräume definierten Halbmetrik d_Λ. Sie wird mit Hilfe der Öffnungen definiert. Die entsprechende Identifizierung ist feiner, es gilt

$$d_\Lambda(X, Y) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{s}_n(X, Y) = 1\,.$$

Es gibt äquivalente Banachräume mit positivem Abstand. In der Menge L_s der separablen Banachräume finden wir zwei Teilmengen

$$\mathsf{L}_1 := \{X \in \mathsf{L}_s : \, d_\Lambda(X, l_1) < 1/2\} \qquad \text{und} \qquad \mathsf{L}_2 := \{X \in \mathsf{L}_s : \, X \not\sim l_1\}\,,$$

so daß gilt: L_1 ist $d_\Lambda-$offen, aber nicht offen in $[\mathsf{L}]$ bezüglich der untersuchten Topologien ULT, LOG und POL. Weiterhin ist L_2 bezüglich unserer Topologien offen, aber nicht $d_\Lambda-$offen.